| | |
|---|---|
| EPFL - Printemps 2022 | Prof. Z. Patakfalvi |
| **Anneaux et Corps** | **Exercices** |
| Série 5 | le 28 Mars 2022 |

Veuillez télécharger vos solutions à l'exercice 7 sur la page Moodle du cours avant le dimanche 10 avril, 18h.

---

**Exercice 1.** (a) Trouver tous les idéaux des anneaux quotients $\mathbb{F}_3[t]/(t^2)$ et $\mathbb{F}_2[t]/(t^3)$. Déterminer lesquels sont premiers et lesquels sont maximaux.

(b) Soit $I \subset M \subset A$ deux idéaux d'un anneau $A$ et soit $\pi : A \to A/I$ l'homomorphisme quotient. Montrer que l'idéal $\pi(M)$ est maximal dans $A/I$ si et seulement si $M$ est maximal dans $A$.

**Exercice 2.**
**Les fonctions polynomiales.** Soit $A$ un anneau commutatif et $\mathcal{F}(A)$ l'anneau des fonctions $\varphi\colon A \to A$ où la somme et le produit sont définis dans l'ensemble d'arrivée (par exemple $(\varphi \cdot \phi)(a) = \varphi(a) \cdot \phi(a)$). On considère l'évaluation comme application $\mathrm{ev}\colon A[t] \to \mathcal{F}(A)$. L'évaluation d'un polynôme $f$ est donc la fonction polynomiale $\mathrm{ev}(f)$ définie par $\mathrm{ev}(f)(a) = \mathrm{ev}_a(f) = f(a)$.

(a) Montrer que l'évaluation est un homomorphisme d'anneaux.

(b) Soit $p$ est un nombre premier. Montrer que l'évaluation n'est pas injective lorsque $A = F_p$. [Indication: Petit Théorème de Fermat.]

(c) Montrer que l'évaluation est injective pour $A = \mathbb{R}$.

**Exercice 3.**
Soit $F$ un corps.

(a) Déterminer $\mathrm{nil}(A)$, où $A = F[x, y]/(x^2y^3)$.

(b) Trouver $\mathrm{nil}(A) = \bigcap_{i=1}^{m} p_i$, où $m$ est minimal et les $p_i$ sont des idéaux premiers dans $A$.

**Exercice 4.**
Soit $F$ un corps. Prouver ce qui suit.

(a) Montrer que $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^p - 1)$.

(b) Montrez que $car(\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]) = p$. En particulier on a $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$

(c) Montrer que $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ n'est pas un produit des 2 anneaux non-zéros.

**Exercice 5.**
Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ est Euclidien.

# 1 Supplementary exercise

**Exercice 6.**
Soit $A = F[G]$, où $F$ est un corps et $G$ est un groupe.

(a) Montrer que $\sum_{g \in G} a_g g \in \mathrm{Z}(A)$ si et seulement si $g \to a_g$ est constant sur les classes de conjugaison.

(b) Fixons $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $\varepsilon$ une racine primitive cubique d'unité. Soit

$$e_1 = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} g,\ e_2 = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \operatorname{sgn}(g) g \text{ et } e_3 = f_1 + f_2 \in A,$$

où $f_1 = \frac{\mathrm{Id} + \varepsilon(123) + \varepsilon^2(132)}{3}$ et $f_2 = \frac{\mathrm{Id} + \varepsilon^2(123) + \varepsilon(132)}{3}$.
Montrer que $A \cong Ae_1 \times Ae_2 \times Ae_3$.

(c) Montrer que $Ae_1 \cong \mathbb{C}$ et $Ae_2 \cong \mathbb{C}$.

(d) Montrer que $Ae_3 \cong M_2(\mathbb{C})$.

# 2 Exercice Bonus

**Exercice 7.**
For the exercise we will need the following definitions. Let $p$ be a prime number.

a) A ring $A$ is finitely generated if there are finitely many elements $c_1, \ldots, c_n \in A$ such that the subring of $A$ generated by $c_1, \ldots, c_n$ is equal to $A$ itself.

b) $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus 0, p \nmid b\}$ is the valuation ring of the p-adic valuation on $\mathbb{Q}$.

c) $\mathbb{Z}_p = \{a/p^i \in \mathbb{Q} | a \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\}$, which should not be confused with the ring of p-adic numbers, which is denoted the same way, but which we have not learned so far in this course

Prove the following points.

1. $\mathbb{Z}_{(p)}$ is not a finitely generated ring.
2. $\mathbb{Z}_p$ is generated by $1/p$ or with other words $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}[1/p]$. In particular $\mathbb{Z}_{|}$ is a finitely generated ring.
3. Show that $\mathbb{Z}_p$ has two subrings: $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}_p$ itself.
4. Let $q$ be a prime number different than $p$. Show that $\mathbb{Z}[1/p, 1/q] \subseteq \mathbb{Q}$ is not isomorphic to $\mathbb{Z}_{(p)}$ (as an abstract ring).
5. How many elements do you need to generated $\mathbb{Z}[1/p, 1/q]$?