Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 4 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soient $V = \mathbb{R}_n[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $B = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ une base et $v = (1, a, a^2, \dots, a^n)^\intercal \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que pour $p \in V$, on a $v^\intercal [p]_B = p(a)$, où $p(x) \in \mathbb{R}$ est l'évaluation de p en $x \in \mathbb{R}$.

Solution. *Nous écrivons $p = \sum_{i=0}^n p_i t^i$, alors $([p]_B)_i = p_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, n+1$. On calcule*

$$v^\intercal [p]_B = \sum_{i=1}^{n+1} a^{i-1} p_{i-1} = \sum_{i=0}^{n} p_i a^i = p(a).$$

Exercice 2. Soient K un corps et n un entier positif. Montrer que la matrice $A \in K^{n\times n}$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a le polynôme caractéristique $p_A(t) = (-1)^n (t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0)$.

Solution. *On montre cette identité par récurrence. Pour $n = 2$, on obtient le résultat voulu :*

$$p_A(t) = \det(A - tI_2) = \begin{pmatrix} -t & -\alpha_0 \\ 1 & -t - \alpha_1 \end{pmatrix} = t(t + \alpha_1) + \alpha_0 = t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

On suppose le résultat vrai au rang $n-1$, et on le montre au rang n. Avec $\det(A - tI_n) = (-1)^n \det(tI_n - A)$, on a

$$(-1)^n p_A(t) = \det(tI_n - A) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & t & \ddots & & \vdots & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On développe le déterminant par rapport à la première ligne (formule de Laplace) et on obtient

$$\begin{aligned} \dots &= t \det \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & t & \ddots & & \vdots & \alpha_2 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}\alpha_0 \det \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= t(t^{n-1} + \alpha_{n-1}t^{n-2} + \dots + \alpha_2 t + \alpha_1) + (-1)^{n+1}\alpha_0(-1)^{n-1} \\ &= t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0, \end{aligned}$$

où pour le premier terme on a utilisé l'hypothèse de récurrence et pour le second terme le fait que la matrice est triangulaire supérieure de diagonale -1.

Exercice 3. Soit $A \in K^{n\times n}$ une matrice triangulaire inférieure, c-à-d

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est $\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.
2. Est-ce que A est diagonalisable ?
3. Est-ce que les deux matrices suivantes sont semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution.

1. *On sait que pour une matrice triangulaire inférieure, son déterminant est donné par le produit des éléments de sa diagonale. Alors,*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$$

Ainsi, les racines de $p_A(\lambda)$ *sont les valeurs* a_{ii}.

2. *En général, non. Par exemple, regarder* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Mais si les valeurs* a_{ii} *sont distinctes, alors* A *est diagonalisable.*

3. *Les matrices* A *et* B *ont les valeurs propres* $\{1, 2, 3\}$, *et* $m_{\text{geom}}(i) = m_{\text{alg}}(i) = 1$ *pour* $i = 1, 2, 3$. *Alors, il y a deux matrices t.q.* $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 3)$ *et* $Q^{-1}BQ = \text{diag}(1, 2, 3)$. *Donc,* $A = PQ^{-1}BQP^{-1}$, *avec* $(PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1}$. *On a*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie, et $f : V \mapsto V$ un endomorphisme. Soit $p : V \mapsto V$ un automorphisme, c-a-d un endomorphisme inversible. Montrer que $\lambda \in K$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de l'endomorphisme $p^{-1} \circ f \circ p$.

Solution.

- *Soit* λ *une valeur propre de* f. *On montre que c'est une valeur propre de* $p^{-1} \circ f \circ p$. *En effet, soit* $v \neq 0$ *un vecteur propre de* f *de valeur propre* λ. *On considère* $w = p^{-1}(v)$. *Alors* $w \neq 0$ *par injectivité de* p^{-1} *et*

$$p^{-1} \circ f \circ p(w) = p^{-1} \circ f(v) = p^{-1}(\lambda v) = \lambda p^{-1}(v) = \lambda w$$

où on a utilisé la linéarité de p^{-1} *pour sortir* λ.

- *Soit* λ *une valeur propre de* $p^{-1} \circ f \circ p$. *On montre que c'est une valeur propre de* f. *En effet, soit* $w \neq 0$ *un vecteur propre de* $p^{-1} \circ f \circ p$ *de valeur propre* λ. *On considère* $v = p(w)$. *Alors* $v \neq 0$ *par injectivité de* p *et*

$$f(v) = f \circ p(w) = p \circ p^{-1} \circ f \circ p(w) = p(\lambda w) = \lambda p(w) = \lambda v$$

où on a utilisé la linéarité de p *pour sortir* λ.

Exercice 5.

1. Vérifier le Théorème de Cayley–Hamilton sur la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

2. Soient K un corps, et $A \in K^{2\times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Calculer l'inverse de A à l'aide du Théorème de Cayley–Hamilton.

3. Considérer le Théorème de Cayley–Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

Solution.

1. *On calcule le polynôme caractéristique de A, on trouve*
$$p_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - t^2 + 3.$$
Si on évalue p_A en A on trouve
$$\begin{aligned} p_A(A) = A^3 - A^2 + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
et donc le théorème est vérifié.

2. *Pour $M \in K^{n\times n}$ on a la formule $det(M) = (-1)^n p_M(0)$; pour A on obtient $det(A) = p_A(0) = a_0 \neq 0$, donc A est bien inversible. Par le théorème de Cayley–Hamilton on a $A^2 + a_1 A + a_0 I_2 = 0_2$. En appliquant A^{-1} à gauche on a $A + a_1 I_2 + a_0 A^{-1} = 0_2$, ce qui donne $A^{-1} = -(A + a_1 I_2)/a_0$.*

3. *Soit R un anneau commutatif. Pour $A \in R^{n\times n}$ et $n > 1$, on ne peut pas simplement remplacer t par A car $\det(A - tI_n) \in R$ tandis que $p_A(A) \in R^{n\times n}$.*

Exercice 6. Déterminer pour quelles valeurs du couple (a, b) la matrice
$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0,$$
est diagonalisable.

Solution.

On a

$$\det(X-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & a & b\\ a & -\lambda & b\\ a & b & -\lambda\end{pmatrix} \overset{\substack{G_{21}(-1)\\ G_{23}(-1)}}{=} \det\begin{pmatrix}-\lambda-a & a+\lambda & 0\\ a & -\lambda & b\\ 0 & b+\lambda & -\lambda-b\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda+a)(\lambda+b)\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ a & -\lambda & b\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=-(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda-a-b).$$

On a trois valeurs propres $-a$, $-b$, et $a+b$, pas forcément distinctes. On considère alors plusieurs cas:

1. *Supposons que $-a=-b=a+b$. On trouve $a=b=0$ et ceci contredit l'hypothèse a,b non nuls.*

2. *Supposons que $-a=-b\neq a+b$. On a donc $a=b$ et deux valeurs propres $-a$ et $2a$ avec multiplicités $m_{\text{alg}}(2a)=1=m_{\text{geom}}(2a)$ et $m_{\text{alg}}(-a)=2$. Puisque*

$$X-(-a)I_3=\begin{pmatrix}a & a & a\\ a & a & a\\ a & a & a\end{pmatrix} \overset{\substack{G_{12}(-1)\\ G_{13}(-1)\\ M_1(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

alors $m_{\text{geom}}(-a)=2=m_{\text{alg}}(-a)$ et A est diagonalisable.

3. *Supposons que $-a=a+b\neq -b$. On a donc $b=-2a$ et deux valeurs propres $-a$ et $2a$ avec multiplicités $m_{\text{alg}}(-a)=2$ et $m_{\text{alg}}(2a)=1=m_{\text{geom}}(2a)$. Puisque*

$$X-(-a)I_3=\begin{pmatrix}a & a & -2a\\ a & a & -2a\\ a & -2a & a\end{pmatrix} \overset{\substack{M_1(a^{-1})\\ M_2(a^{-1})\\ M_3(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{G_{12}(-1)\\ G_{13}(-1)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \overset{P_{23}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

alors $m_{\text{geom}}(-a)=1\neq m_{\text{alg}}(-a)$ et A n'est pas diagonalisable.

4. *Supposons que $-b=a+b\neq -a$. On a donc $b=-a/2$ et deux valeurs propres $-a$ et $a/2$ avec multiplicités $m_{\text{alg}}(a/2)=2$ et $m_{\text{alg}}(-a)=1=m_{\text{geom}}(-a)$. Puisque*

$$X-(a/2)I_3=\begin{pmatrix}-a/2 & a & -a/2\\ a & -a/2 & -a/2\\ a & -a/2 & -a/2\end{pmatrix} \overset{\substack{M_1(a^{-1})\\ M_2(a^{-1})\\ M_3(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}-1/2 & 1 & -1/2\\ 1 & -1/2 & -1/2\\ 1 & -1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{G_{23}(-1)\\ G_{12}(2)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}-1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 3/2 & -3/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

alors $m_{\text{geom}}(a/2)=1\neq m_{\text{alg}}(a/2)$ et X n'est pas diagonalisable.

5. *Supposons que les trois valeurs propres $-a$, $-b$, $a+b$ sont distinctes, alors la matrice X est diagonalisable.*

Exercice 7. (*) Soient K un corps, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n \times n}$ et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités algébriques. Soit $m_1 + \cdots + m_r = n$.

Définition: La *trace* de A est définie par $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

i) $\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$

ii) Si $p_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$.

iii) $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i$

Solution. –