Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 5 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit V un espace vectoriel et soit $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Soit $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(v_1, v_1) = 2, f(v_2, v_2) = 3, f(v_3, v_3) = -1, f(v_1, v_2) = 0, f(v_2, v_3) = 1, f(v_3, v_1) = -2.$$

1. Écrire la matrice A_B^f de la forme bilinéaire f pour la base B.
2. Trouver une base orthogonale $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ pour V par rapport à la forme bilinéaire f.

Solution.

1.

$$A_B^f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Une base orthogonale $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ est donnée par exemple par:

$$w_1 = v_1, w_2 = v_2, w_3 = v_1 - 1/3v_2 + v_3.$$

Il faut d'abord vérifier que ce soit une base, ce qu'on peut faire en vérifiant que les trois vecteurs sont linéairement indépendants, et après que les vecteurs sont orthogonaux, c-a-d que $f(w_i, w_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.

Exercice 2. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Les matrices A et B sont semblables si et seulement si elles ont le même spectre.

☐ True ☐ False

2. Si les matrices A et B ont le même spectre $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et sont toutes les deux diagonalisables, alors A et B sont semblables.

☐ True ☐ False

3. Si $p_A(B) = 0$, alors A et B sont semblables.

☐ True ☐ False

4. Si A et B sont semblables, alors $p_A(B) = 0$.

☐ True ☐ False

Solution.

1. *Faux. La direction $\Rightarrow$ est vraie, car deux matrices semblables possèdent le même polynôme caractéristique. Cependant, la direction $\Leftarrow$ est fausse. On pourra par exemple prendre*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui ont le même spectre $\{0, 1\}$, mais des polynômes caractéristiques différents.

2. *Faux. On peut prendre le même exemple qu'au point 1, les matrices A et B étant trivialement diagonalisables.*

3. *Faux. On pourra prendre*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Vrai. Ecrivons $B = P^{-1}AP$. Alors*

$$p_A(B) = a_0 I + \sum_{k=1}^{n} a_k B^k = a_0 P^{-1} P + \sum_{k=1}^{n} a_k P^{-1} A^k P = P^{-1} p_A(A) P = 0$$

par Cayley-Hamilton.

Exercice 3. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que deux formes bilinéaires $f, g : V \times V \to K$ sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Solution. *Soit n la dimension de V et $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Les matrices A_B^f et A_B^g sont telles que*

$$(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j) \quad \text{et} \quad (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j)$$

et, en plus, pour chaque $x, y \in V$

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B \quad \text{et} \quad g(x, y) = [x]_B^T A_B^g [y]_B.$$

Or, si $A_B^f = A_B^g$, pour chaque $x, y \in V$,

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T A_B^g [y]_B = g(x, y),$$

donc les deux formes bilinéaires sont les mêmes. Si $A_B^f \neq A_B^g$, il existe $1 \leq i, j, \leq n$ où $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij}$. Alors

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j),$$

donc les deux formes bilinéaires sont différentes. On conclut que les deux formes bilinéaires f et g sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Exercice 4. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que une forme bilinéaire $f : V \times V \to K$ est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Solution. *Soit n la dimension de V et $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. A_B^f est telle que $(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j)$ et pour chaques $x, y \in V$, $f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B$. Or, si A_B^f est symétrique, pour chaque $x, y \in V$,*

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T (A_B^f)^T [y]_B = \left([y]_B^T A_B^f [x]_B\right)^T = (f(y, x))^T = f(y, x),$$

car $f(x, y)$ est un scalaire, donc f est symétrique. Si A_b^f n'est pas symétrique, il existe $1 \leq i, j, \leq n$ où $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji}$ et

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji} = f(v_j, v_i),$$

donc f n'est pas symétrique. On conclut que f est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Exercice 5. Soit $V \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur $\mathbb{R}$ avec le forme bilinéaire

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \mathrm{d}x.$$

1. Décrire la matrice $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ pour $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
2. Montrer que l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ de polynômes

$$p_0 = 1 \qquad\qquad p_1 = x$$
$$p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad\qquad p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

   est une base orthogonale de V.

Solution.

1.

$$A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

2. Soit $q \in V$. Nous écrivons $q = q_3x^3 + q_2^2x^2 + q_1x^1 + q_0$. Alors,

$$\begin{aligned} q &= q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x^1 + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + q_2x^2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + (q_0 + \frac{1}{3}q_2) \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)p_1 + (q_0 + \frac{1}{3}q_2)p_0. \end{aligned}$$

Cela implique que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est un système générateur de V et $|\{p_0, p_1, p_2, p_3\}| = \dim V$ implique que c'est une base.

On montre ensuite que $\langle p_i, p_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Par exemple,

$$\begin{aligned} \langle p_2, p_3 \rangle &= \int_{-1}^{1} p_2p_3 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)(5x^3 - 3x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}x^6 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 6. On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard?

Solution. *La réponse est non. On considère tous les 7 vecteurs non nuls dans l'espace $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Il faut seulement vérifier que tout triplet de vecteurs de $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ orthogonaux forment une liste linéairement dépendante.*

Voici toutes les paires de vecteurs non nuls de $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *qui sont orthogonales (on doit aussi considérer les combinaisons linéaires des* v_1, v_2 *et* v_3*).*

$$
\begin{array}{ll}
(v_1, v_3), & (v_1, v_1 + v_3), \\
(v_2, v_1 + v_3), & (v_3, v_1 + v_3), \\
(v_2, v_1 + v_2 + v_3), & (v_1 + v_2, v_2 + v_3), \\
(v_1 + v_2, v_1 + v_3), & (v_1 + v_3, v_2 + v_3), \\
(v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_3). &
\end{array}
$$

Les triplets de vecteurs de $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *orthogonaux sont* (v_1, v_3, v_1+v_3) *et* $(v_1+v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3)$ *et on conclut facilement que ces deux listes sont linéairement dépendantes.*
Ainsi $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *n'admet pas de bases orthogonales.*

Exercice 7. Montrer que la relation de congruence $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$.

Rappel: Deux matrices $A, B \in K^{n\times n}$ sont *congruentes* s'il existe une matrice $P \in K^{n\times n}$ inversible telle que $A = P^T BP$.

Solution. *Pour montrer que* $\cong$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices* $K^{n\times n}$*, il suffit de montrer que la relation est*

1. *réflexive:* $A \cong A$.
2. *symétrique:* $A \cong B \Rightarrow B \cong A$.
3. *transitive:* $A \cong B$ *et* $B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

1. *Réflexivité. On a que*
$$A = I^T AI\,,$$
où I *est la matrice identité dans l'ensemble des matrices* $K^{n\times n}$*. Donc* $A \cong A$.

2. *Symétrie. Si* $A \cong B$, $\exists\, P \in K^{n\times n}$ *inversible tel que*
$$A = P^T BP\,,$$
donc
$$B = P^{-T} AP^{-1}\,,$$
et $B \cong A$.

3. *Transitivité. Soit* $A \cong B$ *et* $B \cong C$*. Donc* $\exists\, P, Q \in K^{n\times n}$ *inversibles tels que*
$$A = P^T BP \quad \text{et} \quad B = Q^T CQ\,.$$
Donc on a
$$A = P^T Q^T CQP = (QP)^T C(QP)\,,$$
où la matrice QP *est inversible puisque* Q *et* P *sont inversibles. Donc* $A \cong C$.

Exercice 8. (*) Soit V un espace vectoriel sur un corps K et $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to K$ une forme bilinéaire. Soient $E \subseteq V$ et E^* le sous-espace de V engendré par les éléments de E. Montrer $E^\perp = E^{*\perp}$.

Rappel: Pour $W \subseteq V$, $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ pour tout } w \in W\}$.

Solution.