Prof. Friedrich Eisenbrand 08 avril 2022

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 7

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base orthogonale et $U = \text{span}\{b_i : i = 1, \ldots, n, \langle b_i, b_i \rangle > 0\}$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restreint à U est un produit scalaire du sous-espace U.

Exercice 2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une factorisation $A = A^* R$ du corollaire 3.19 de la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}.$$

Exercice 3. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $dist(u, V) = \min_{v \in V} ||u - v||$, où la norme $|| \cdot ||$ est par raport au produit scalaire ordinaire.

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x\in\mathbb{R}^2} ||Ax - b||^2$ satisfait

- ☐ *a)* $x_2 = 3$.
- ☐ *b)* $x_2 = -3$.
- ☐ *c)* $x_2 = 4$.
- ☐ *d)* $x_2 = -4$.

Exercice 5. Montrer le Lemme 4.2 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit λ une valeur propre de A avec le vecteur propre x correspondant. Montrer que λ est réel.

Exercice 6. Soit $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).
2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors toutes les valeurs propres de A^{-1} sont aussi positives.

Exercice 8. (*)

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.
2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ linéairement indépendants. Montrer que

   $$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

   Rappel: Si V est un espace vectoriel sur un corps K, son espace dual V^* est l'ensemble des applications linéaires $\phi : V \longrightarrow K$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles.