4.1. Le résultat est immédiat en appliquant les définitions.

4.2. On a en utilisant que la connexion est Levi-Cività :

$$X \cdot g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (1)$$

$$Y \cdot g(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \quad (2)$$

$$Z \cdot g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad (3)$$

Puis en utilisant qu'elle est sans torsion :

$$g([X,Y], Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) \quad (4)$$

$$g([X,Z], Y) = g(\nabla_X Z, Y) - g(\nabla_Z X, Y) \quad (5)$$

$$g([Y,Z], X) = g(\nabla_Y Z, X) - g(\nabla_Z Y, X) \quad (6)$$

(1) + (2) - (3) + (4) - (5) - (6) est la relation cherchée. Cela permet de définir un vecteur $\nabla_X Y$ car la métrique est non dégénérée. Si on définit ∇ par la formule de Koszul, il faut vérifier qu'elle a toute les propriétés d'une connexion de Levi-Cività. Les calculs sont faciles et on ne les détaille pas.

4.3. La seule chose à vraiment vérifier est la règle de Leibniz. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $X, Y \in \Gamma(M)$, alors on calcule

$$\nabla_X fY = h_1 \nabla^1_X fY + h_2 \nabla^2_X fY = h_1(f\nabla^1_X Y + X(f)Y) + h_2(f\nabla^2_X Y + X(f)Y) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

où la dernière égalité est vraie si et seulement si $h_1 + h_2 = 1$.

4.4. Le plongement ψ représente un paramétrage de M par l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Notons $u^1, \dots, u^k$ les coordoonées sur Ω (et donc les coordonnées sur M associées à la carte ψ^{-1}).

L'espace tangent T_pM en un point $p = \psi(u) \in M$ admet pour base les vecteurs $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k}$. On peut représenter ces vecteurs concrètement comme des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\xi_i = \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial u^i}$$

Si on dérive le champs de vecteurs ξ_i en direction de la $j^{\text{ème}}$ coordonée, on obtient un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on peut décomposer en une composante tangente à M et une composante normale à M. On peut donc écrire:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} = \Delta^k_{ij} \xi_k + n_{i,j}$$

avec $n_{ij} \perp T_pM$. Le tenseur métrique est le rappel par ψ de la métrique Euclidienne de $\mathbb{R}^n$, ainsi

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u^i}, \frac{\partial \psi}{\partial u^j} \right\rangle = \langle \xi_i, \xi_j \rangle.$$

En dérivant g_{ij}, on a

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \left\langle \frac{\partial \xi_i}{\partial u^k}, \xi_j \right\rangle + \left\langle \xi_i, \frac{\partial \xi_j}{\partial u^k} \right\rangle = \langle \Delta_{ik}^m \xi_m, \xi_j \rangle + \langle \xi_i, \Delta_{jk}^m \xi_m \rangle$$

car les vecteurs n_{ik} et n_{jk} sont orthogonaux à ξ_m. On a donc

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \langle \Delta_{ik}^m \xi_m, \xi_j \rangle + \langle \xi_i, \Delta_{jk}^m \xi_m \rangle = \Delta_{ik}^m g_{mj} + \Delta_{jk}^m g_{jm}.$$

En comparant avec la preuve de l'unicité de la connection de Levi-Civita on conclut que $\Delta_{ik}^m = \Gamma_{ik}^m$ et donc

$$\Gamma_{ij}^k \xi_k = \Delta_{ij}^k \xi_k = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} \right)^\top = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^j \partial u^j} \right)^\top$$

Remarque 1. La composante normale $\boldsymbol{\nu}_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^j \partial u^j} \right)^\perp$ joue aussi un rôle important en théorie des sous-variétés, on reviendra sur cette question lors de l'étude de la *seconde forme fondamentale.*

Remarque 2. *Plus généralement, Si (N, g) est une variété riemannienne dont le connexion de Levi-Civita est ∇^N et si M est une sous-variété de N que l'on munit de la métrique induite. Alors la connexion de Levi-Civita de M, ∇^M est décrite par la formule*

$$\nabla_X^M Y = \left(\nabla_X^N Y \right)^\top$$

Pour montrer ce résultat, il s'agit de montrer que la connexion ∇^N satisfait à tous les axiomes de la connexion de Levi-Civita; on conclura par unicité.

4.5. (a) Par hypothèses, $X, Y \in \Gamma_\gamma$ sont des champs parallèles, i.e. $\nabla_t X = \nabla_t Y \equiv 0$. On a

$$\frac{d}{dt} \left(g_{\gamma(t)}(X_t, Y_t) \right) = g(\nabla_t X, Y) + g(X, \nabla_t Y) = 0.$$

(b) L'application de transport parallèle est l'application

$$P_t : \begin{array}{ccc} T_{\gamma(0)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(t)}M \\ V_0 & \longmapsto & V_t \end{array}$$

où V_t est l'unique champs parallèle le long de γ avec $V_{\gamma(0)} = V_0$. Par le point précédent on a $g(X_t, X_t) = g(X_0, X_0)$. Or $g(X_t, X_t) = g(P_t X_0, P_t X_0)$ car X est parallèle.
Pour l'existence d'un repère mobile orthonormé et parallèle le long de γ, on part d'une base orthonormé $(v_1, \cdots, v_n)$ de $T_{\gamma(0)}M$ et on construit les considère les (uniques) champs $X_1, \cdots, X_n$ parallèles le long de γ et tels que

$$X_i(0) = v_i.$$

Le point précédent montrer que ces champs forment une base orthonormée en chaque point puisque

$$g_{\gamma(t)}(X_i(t), X_j(t)) = g_{\gamma(0)}(v_i, v_j) = \delta_i^j.$$

(c) Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un repère orthonormé et parallèle le long d eγ. On note

$$X(t) = \sum_i a_i(t) X_i(t).$$

On a d'une part, d'après la question (a),

$$g_{\gamma(t)}(X(t), X_i(t)) = g_{\gamma(0)}(X(0), X_i(0)) = a_i(0)$$

et aussi

$$g_{\gamma(t)}(X(t), X_i(t)) = \sum_j a_j(t) g(X_j(t), X_i(t)) = a_i(t).$$

(d) Supposons tout d'abord que γ est une géodésique, c'est-à-dire que $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Par ce qui précède on sait que $\|X\|$ et $\|\dot\gamma\|$ sont constants le long de γ. Mais aussi

$$\cos(< (X, \dot\gamma)) = \frac{g(X, \dot\gamma)}{\|X\| \, \|\dot\gamma\|}$$

est constant donc aussi $< (X, \dot\gamma)$ est constant par continuité.
Inversement supposons que $< (X, \dot\gamma)$ est constant et montrons que γ est une géodésique. On a

$$0 = \frac{d}{dt} g(X, \dot\gamma) = g(\nabla_{\dot\gamma} X, \dot\gamma) + g(X, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) = g(X, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)$$

Puisque X est quelconque et qu'il existe une base de tels champs, on conclut qu'on a bien

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$