EPFL - Printemps 2022 M. Troyanov
Variétés Riemanniennes **Exercices**
Séries 5

Exercice 5.1. (Champs de vecteurs et crochet de Lie)

(a) Soient $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x\dfrac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que XY n'est pas une dérivation de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(b) Soit M une variété différentiable et X, Y deux champs de vecteurs C^∞ sur M. Montrer que l'application suivante:
$$[X,Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad \text{définie par} \quad [X,Y]f = XYf - YXf$$
définit un champ de vecteurs C^∞ sur M. Cet opérateur différentiel s'appelle le *crochet de Lie de X et Y*.

(c) Si les expressions de X et Y (dans un certain système de coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$) sont $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, trouver l'expression en coordonnées de $[X,Y]$.

(d) Déduire du point précédent que
$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \equiv 0,$$
pour tout champs de vecteurs de coordonnées.

(e) Montrer les propriétés suivantes du crochet de Lie:

(i) **Bilinéarité:** pour $a, b \in \mathbb{R}$:
$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y].$$

(ii) **Antisymétrie:**
$$[X,Y] = -[Y,X].$$

(iii) **Identité de Jacobi:**
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

(iv) Pour $f, g \in C^\infty(M)$:
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

(f) Pour les champs de vecteurs X, Y suivants définis sur $\mathbb{R}^3$, calculer leur crochet de Lie $[X,Y]$.

(i) $X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$;

(ii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$;

(iii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$;

Exercice 5.2. (a) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le gradient de f par le champ de vecteurs $\mathrm{grad} f \in \Gamma(M)$ tel que $\langle \mathrm{grad} f, X\rangle = df(X) = X(f)$ pour tout $X \in \Gamma(M)$.
Calculer l'expression du gradient en coordonnées.

(b) Soit $Y \in \Gamma(M)$ un champ de vecteurs, alors la divergence de Y est donnée par la fonction lisse $\mathrm{div}(Y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ définie par $\mathrm{div}(Y) = \mathrm{Trace}(\nabla Y)$ où $\nabla Y : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est donnée par $\nabla Y(X) = \nabla_X Y$.
Calculer l'expression de la divergence en coordonnées.

(c) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le laplacien de f par la fonction $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$. Calculer l'expression du laplacien en coordonnées.

(d) Remarquer que si $M = \mathbb{R}^n$, les concepts de gradient, divergence et laplacien correspondent à ce que vous avez appris en deuxième année.

Exercice 5.3. (a) Expliquer ce qu'on entend lorsqu'on dit qu'une connexion n'est pas un tenseur, puis justifier cette affirmation.

(b) Prouver la formule de changement de coordonnées pour les symboles de Levi-Civita: Supposons que $(x^1, \dots, x^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $p \in M$ et $(y^1, \dots, y^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $q = f(p) \in M$ avec f un changement de coordonnées. Montrer que le changement de coordonnées pour les symboles de Christoffels est donné par la formule

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x) \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x)) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Exercice 5.4. On commence par une définition. Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés différentiables, et soient ∇ une connection affine définie sur N et $\overline{\nabla}$ une connection affine sur M. On dit que f est *compatible* avec ∇ et $\overline{\nabla}$ si la condition suivante est satisfaite pour tous champs de vecteurs X, Y sur M :

$$f_*(\overline{\nabla}_X Y) = \nabla_{f_* X}(f_* Y).$$

Supposons que $(x^1, \dots, x^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $p \in M$ et $(y^1, \dots, y^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $q = f(p) \in N$.

(a) Montrer que les symboles de Christoffels de ∇ et $\overline{\nabla}$ sont reliés par la formule

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x) \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x)) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}.$$

(b) Montrer que si f est un difféomorphisme local, alors on peut aussi écrire cette formule sous la forme

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x) = \sum_{\gamma=1}^{m} \left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x)) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} \right] \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}.$$

(c) Montrer que si $M = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f : M \to N$ est compatible avec ∇ si et seulement si f est une géodésique de N pour ∇ (on considère la connexion standard sur l'intervalle).

(d) Si $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$ avec les connexions plates standards, alors $f : M \to N$ est compatible avec les connections si et seulement si c'est une application affine, c'est-à-dire une application du type $f(x) = Ax + b$ où A est une $n \times m$ matrice et $b \in \mathbb{R}^n$ est constant.

(e) Déduire de la formule en (b) une nouvelle solution de l'exercice 4.1 (lire éventuellement les sections 2.2 et 2.3 du polycopié).