

Vous pouvez télécharger vos solutions à l'exercice bonus (Exercice 8) sur la page Moodle du cours avant le dimanche 24 avril, 18h.

---

## 1 Exercices

**Exercice 1.** 1. Soit  $A$  un anneau Euclidien. Prouvez que l'algorithme d'Euclide peut être adapté pour calculer les pgdc dans  $A$ .

2. Effectuez la division avec reste de  $27 - 23i$  par  $8 + i$  dans  $\mathbb{Z}[i]$ , et montrez que ces deux entiers de Gauss sont premiers entre eux.
3. Calculez un pgdc de  $11 + 3i$  et de  $1 + 8i$  dans  $\mathbb{Z}[i]$ . Ce pgdc est-il unique ?

**Exercice 2.**

Notons  $\mathcal{C} := C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  l'anneau des fonctions réelles continues sur l'intervalle  $[0, 1]$  (muni des opérations d'addition et de multiplication de fonctions).

1. Pour  $x \in [0, 1]$ , écrivons  $I_x := \{f \in \mathcal{C} \mid f(x) = 0\}$ . Montrez que  $I_x$  est un idéal maximal.
2. Pour  $x \neq y$ , montrez que  $I_x \cap I_y$  n'est pas un idéal premier.
3. Soit  $I \subset \mathcal{C}$  un idéal. Supposons que  $I$  n'est contenu dans aucun des  $I_x$ . Montrez que  $I = \mathcal{C}$ .  
*Indication : la propriété de Heine-Borel sera utile.*
4. Montrez que tout idéal maximal de  $\mathcal{C}$  est égal à  $I_x$  pour un certain  $x \in [0, 1]$ .

**Exercice 3.**

Considérons les polynômes  $f = x^3 - 2x^2 + x - 2$  et  $g = x^4 - 2x^3 + 7x - 14$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ .

1. Montrez que le pgdc de  $f$  et de  $g$  dans  $\mathbb{Z}[x]$  vaut  $x - 2$ .
2. Ecrire  $f = (x - 2)f_0$  et  $g = (x - 2)g_0$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ .
3. Pour un premier  $p$ , notons  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  la réduction de  $f$  et  $g$  dans  $\mathbb{F}_p[x]$ . Calculez le pgdc de  $\bar{f}$  et de  $\bar{g}$  pour chaque  $p$ .  
*Indication : Remarquez que les étapes de l'algorithme d'Euclide définissables dans  $\mathbb{Z}[x]$  sont des étapes de l'algorithme d'Euclide dans  $\mathbb{F}_p[x]$  après réduction modulo  $p$ .*

**Exercice 4.** 1. Soit  $d > 0$  un entier positif. Montrez que  $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$  est un corps de fractions de  $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ .

2. Montrez que  $x^3 - 2i$  est irréductible dans  $(\mathbb{Z}[i])[x]$ .  
*Indication : Utilisez le lemme de Gauss, et gardez en tête qu'un élément de  $\mathbb{Q}[i]$  peut s'écrire comme  $\frac{a+bi}{n}$  avec  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ .*

**Exercice 5.**

Soit  $k$  un corps.

1. Montrez que le sous-anneau  $k[t^2, t^3] \subset k[t]$  n'est pas factoriel.
2. De même, montrez que  $k[t^2, t^5]$  et  $k[t^3, t^7]$  ne sont pas factoriels.

3. Montrez que  $k[x, y]/(x^2 - y^3)$  n'est pas factoriel.

*Indication : Montrez que cet anneau est isomorphe à l'un des anneaux considérés précédemment.*

### Exercice 6.

Considérons l'anneau de matrices

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} n & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

ainsi que le sous-ensemble

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\} \subset A.$$

1. Montrez que  $I$  est un idéal bilatère, que  $A/I \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$  et que  $A/I$  est Noethérien.
2. Montrez que  $I$  est un idéal à droite minimal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'idéal à droite  $J$  tel que  $0 \subsetneq J \subsetneq I$ ).
3. Montrez que  $A$  est Noethérien à droite.

*Indication : Etant donnée une chaîne croissante d'idéaux, considérez son image par l'application quotient  $A \rightarrow A/I$ .*

**Exercice 7.** 1. Montrez que  $x^2 + y^2$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[x, y]$ , mais pas dans  $\mathbb{C}[x, y]$ .

2. Montrez que  $x^3 - (y^7 + 2y^5 + y^3)$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[x, y]$ .

## 2 Exercice bonus

### Exercice 8.

Let  $A$  be a UFD (anneau factoriel), and let  $K = \text{Frac}(A)$  the fraction field of  $A$  with  $\text{car}(A) = \text{car}(K) \neq 2$ . Let  $a, b, c \in A$  with  $a \neq 0$  and  $pgdc = 1$ .

1. Show that  $ax^2 + bx + c \in A[x]$  is not irreducible if and only if  $\exists s \in A$  such that  $s^2 = b^2 - 4ac$ .
2. Are the following polynomials irreducible or not in  $\mathbb{C}[x, y]$ ? If not, write down the irreducible factorization.

(a)  $x^2 + 2yx + 1$

(b)  $y^2x^2 + yx^2 + yx + y^2$

(c)  $x^2 + yx + y^2$