

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 8

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A = B^T B$.

Exercice 2. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 - i & -3i \\ 2 + i & 0 & 1 - i \\ 3i & 1 + i & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une matrice unitaire $P \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ telle que $P^* \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. Les éléments de la matrice P sont de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Pour chaque forme suivante Q , décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 4. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6 , donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_5 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, & A_6 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 5. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.
2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Exercice 6. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non négatifs, c'est-à-dire $\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Rappel: Soit $K = \{l_1, \dots, l_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ où $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k \leq n$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k \times k}$ est la matrice $(B_K)_{ij} = A_{l_i l_j}$, $1 \leq i, j \leq k$.