Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 6 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Transformez les matrices réelles suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont $0, 1$ et -1. Combien de 0, 1 et -1 sont sur la diagonale ? (Ces numéros sont appelés l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$(+) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. *On va utiliser l'algorithme 3.1 pour diagonaliser A. On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Finalement, on multiplie la deuxième colonne par $1/5$ et on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. L'indice de nullité est donc $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.*

2. *On additionne -1 fois la première ligne sur la deuxième ligne: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On additionne -1 fois la première colonne sur la deuxième colonne : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc l'indice de nullité est $r_0 = 1$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$ et l'indice de négativité est $r_- = 0$.*

3. *On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne et après -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On additionne -1 fois la première ligne sur la troisième ligne et après -1 fois la première colonne sur la troisième colonne pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

On additionne $-3/5$ fois la deuxième ligne sur la troisième ligne et et après $-3/5$ fois la deuxième colonne sur la troisième pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

On multiplie la première colonne par $1/2$, la deuxième colonne par $1/5$ et la troisième colonne par $5/4$ pour avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'indice de nullité est $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 2$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.

Exercice 2. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $||v_1 + \ldots + v_n||^2 = ||v_1||^2 + \ldots + ||v_n||^2$.

b) Montrer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i, $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Solution. *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle . \rangle$. Soient $v_1, \ldots, v_n \in V$ des vecteurs deux à deux orthogonaux (c'est-à-dire $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $1 \leq i \neq j \leq n$).*

a) On va montrer que $||v_1 + \ldots + v_n||^2 = ||v_1||^2 + \ldots + ||v_n||^2$. Par définition,

$$\begin{aligned} ||v_1 + \ldots + v_n||^2 &= \langle v_1 + \ldots + v_n, v_1 + \ldots + v_n \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i = j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2 \end{aligned}$$

où dans la 3ème ligne, on a utilisé le fait que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

b) *Supposons que l'ensemble $\{v_1 \dots, v_n\}$ ne soit pas libre. Alors il existe des coefficients $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$. Soit $c_i \neq 0$ pour un certain $i \in \{1, \cdots, n\}$. Alors*

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \langle v_j, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

parce que $c_i \neq 0$ et $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$; donc on arrive à une contradiction. Alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble libre.

Exercice 3. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'*identité de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle.$$

Solution.

1. *Soit $v \in V$ avec $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ pour quelques $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\begin{aligned} \langle v, v_k \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Ca implique que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle v_k.$$

2. *On utilise* 1.*:*

$$\langle f,g\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n}\langle f,v_k\rangle v_k, \sum_{k=1}^{n}\langle g,v_k\rangle v_k \right\rangle \tag{1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left\langle \langle f,v_k\rangle v_k, \sum_{i=1}^{n}\langle g,v_i\rangle v_i \right\rangle \tag{2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle \langle f,v_k\rangle v_k, \langle g,v_i\rangle v_i\rangle \tag{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\langle \langle f,v_k\rangle v_k, \langle g,v_k\rangle v_k\rangle \tag{4}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\langle f,v_k\rangle\langle g,v_k\rangle. \tag{5}$$

Dans (2) et (3), nous avons utilisé le fait qu'une forme bilinéaire est linéaire par rapport à un élément. Dans (4) et (5), nous avons utilisé l'orthonormalité.

Exercice 4.

1. Soit V un espace vectoriel sur K avec une base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n\times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P$ est une matrice diagonale.

   Montrer que les éléments $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k-ième colonne de P, forment une base orthogonale de V.

2. Soit maintenant V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base V et $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{Z}_3$ une forme bilinéaire symétrique t.q.

$$A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

   Déterminer une base orthogonale de V.

Solution.

1. *Soient $D = P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P$ une matrice diagonale, et $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, c-à-d $u_k = \sum_{i=1}^{n} P_{i,k} v_i$. Alors,*

$$\begin{aligned}\langle u_i,u_j\rangle &= [u_i]_B^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}[u_j]_B\\ &= (P_i)^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_j\\ &= (Pe_i)^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} Pe_j\\ &= e_i^T(P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P)e_j\\ &= e_i^T D e_j\\ &= D_{i,j},\end{aligned}$$

où $D_{i,j}$ est égale à zéro si $i \neq j$. Les vecteurs u_k sont donc orthogonaux et linéairement indépendants, parce que P est inversible.

2. *On applique l'algorithme 3.1 du cours. Pour trouver la matrice P, on reporte toutes les opérations faites sur la matrice A à une matrice identité I.*

   (a) *On commence avec $A_0 = A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, $P_0 = I$.*

   (b) *On échange les lignes 1 et 3, puis les colonnes 1 et 3 de A_0. On fait de même sur P_0. On obtient*

   $$A_1 = P_1^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) *On additionne -2 $(= 1)$ fois la ligne 1 à la ligne 2 de A_1 et similairement pour les colonnes. On fait de même sur P_1. On obtient*

   $$A_2 = P_2^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) *On additionne -1 $(= 2)$ fois la ligne 1 à la ligne 3 de A_2 et similairement pour les colonnes. On fait de même sur P_2. On obtient*

   $$A_3 = P_3^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   On a ainsi trouvé une matrice

   $$P = P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   telle que

   $$P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Une base orthogonale de V est donc donnée par les vecteurs

   $$u_1 = v_3,\ u_2 = v_2 + v_3,\ u_3 = v_1 + 2v_3$$

   où on a utilisé le premier point de cet exercice.

Exercice 5. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y\rangle = x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_2^2$ ne possède pas de base orthogonale.

Solution. *On note*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v_1 = (a,b)^T$ et $v_2 = (c,d)^T$ deux vecteurs non nuls orthogonaux, i.e. tels que

$$v_1^T C v_2 = (a,b) C \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad + bc = 0.$$

Si un des coefficients est nul, par exemple (et sans perte de généralité) si $a = 0$:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad d \neq 0,$$

où la 1-ère et 3-ère implications decoulent de l'hypothèse que les vecteurs sont non nuls. Par conséquent, les vecteurs sont linéairement dépendants. D'autre part, si tous les coefficients sont non nuls, on sait que $ad = bc$ parce que le corps est de caractéristique 2. Or,

$$ad = bc \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} ab^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} cd^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = bd^{-1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les vecteurs sont de nouveau linéairement dépendants. On conclut que si v_1, v_2 sont orthogonaux, alors les vecteurs ne sont pas libres. En particulier, il n'existe pas de base orthogonale de $\mathbb{Z}_2^2$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Autre façon : l'égalité $ad + bc = 0$ est équivalente à $ad - bc = 0$ en caractéristique 2. On reconnaît là le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$. Celui-ci étant nul, la matrice n'est pas inversible et les vecteurs v_1 et v_2 ne peuvent former une base de $\mathbb{Z}_2^2$.

Exercice 6. (*) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle qu'il existe deux vecteurs u et v vérifiant

- $f(u,u) < 0$, et
- $f(v,v) > 0$.

Montrer qu'il existe alors également un vecteur w tel que $f(w,w) = 0$.

Solution.