EPFL - Printemps 2022	M. Troyanov
Variétés Riemanniennes	**Exercices**
Séries 7	

Exercice 7.1. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques (non vides). On suppose qu'elle est ouverte et propre et que Y est connexe alors f est surjective.
Montrer ensuite que chacune des 3 hypothèses est nécessaire à la conclusion. (Une application continue entre deux espaces topologiques est dite propre si l'image inverse de tout compact est compact).

Exercice 7.2. Montrer que si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés riemanniennes, alors il existe une unique métrique Riemannienne sur $M_1 \times M_2$ telle que M_1 et M_2 soient plongées isométriquement et orthogonalement en chaque point dans $M_1 \times M_2$.
Montrer ensuite que si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont complètes, alors $M_1 \times M_2$ est compète pour cette métrique.

Exercice 7.3. Montrer qu'une variété riemannienne homogène (i.e telle qu'il existe un groupe d'isométries agissant transitivement) est complète.

Exercice 7.4. On dit qu'une variété riemannienne (M, g) est *isotrope* si pour tout point p le groupe des isométries de M qui fixent p (i.e. le stabilisateur du point p dans le groupe $\mathrm{Isom}(M)$) agit transitivement sur les vecteurs de norme 1 de T_pM :

$$\forall p \in M, \ \forall v, w \in T_pM : \ \|v\| = \|w\| \ \Rightarrow \ \exists \varphi \in \mathrm{Isom}(M, g) \text{ t.q. } \varphi(p) = p \text{ et } d\varphi_p(v) = w.$$

a) Donner des exemples de variétés isotropes.

b) Démontrer que toute variété riemannienne connexe (M, g) complète et isotrope en chaque point est homogène.
Indication : étant donné deux points, considérer le milieu de la géodésique qui joint p à q.

c) Donner un exemple de variété Riemannienne qui est homogène mais qui n'est pas isotrope.

Exercice 7.5. Démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : *Soit $f : M \to N$ une isométrie locale entre deux variétés Riemanniennes (M, g) et (N, h). Si (M, g) est complète et N est connexe, alors f est un revêtement. De plus, (N, h) est également complète.*
Indication : L'exercice 6.4 est utile.