Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 7 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ une base orthogonale et $U = \operatorname{span}\{b_i : i = 1, \dots, n,\ \langle b_i, b_i\rangle > 0\}$. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ restreint à U est un produit scalaire du sous-espace U.

Solution. *Il faut montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{|U\times U}$ est définie positive. Soit*

$$I = \{i : i = 1, \dots, n,\ \langle b_i, b_i\rangle > 0\}$$

Soit $u \in U$ avec représentation $u = \sum_{i\in I} \alpha_i b_i$. Alors

$$\langle u, u\rangle = \sum_{i,j\in I} \alpha_i\alpha_j \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{i\in I} \alpha_i^2 \langle b_i, b_i\rangle \geq 0$$

où on a utilisé la bilinéarité pour la première égalité et l'orthogonalité des b_i's pour la dernière égalité. De plus, il y a égalité

$$\langle u, u\rangle = 0$$

si et seulement si $\alpha_i^2 = 0$ pour tout $i \in I$, i.e. si et seulement si $u = 0$.

Exercice 2. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une factorisation $A = A^* R$ du corollaire 3.19 de la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}.$$

Solution. *Nous trouvons une factorisation de A_2, ce qui nous donne une factorisation de A_1 lorsque $n = 3$.*

On utilise le procédé de Gram-Schmidt et on démontre la forme générale de la factorisation par récurrence.

Soient $v_1, \ldots, v_n$ les colonnes de $A = A_2$ et $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt. Si $i \geq j+2$, on a $v_i \perp v_1, ..., v_j$ et donc $v_i \perp u_1, ..., u_j$ aussi, car $\operatorname{span}(v_1, ..., v_k) = \operatorname{span}(u_1, ..., u_k)$ pour tout k. L'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut donc être simplifée:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_{j+1} &= v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j, \ 1 \leq j \leq n-1 \end{aligned}$$

Nous montrons par récurrence que

$$(u_j)_i = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{j} & i \leq j \\ 1 & i = j+1 \\ 0 & i > j+1 \end{cases}.$$

Pour $j = 1$, c'est vrai. Supposons que c'est vrai pour un $j \geq 1$. On obtient $\|u_j\|^2 = \frac{j+1}{j}$ et donc le coefficient de Fourier

$$\frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} = j/(j+1).$$

On a

$$\begin{aligned} (u_{j+1})_i &= \left(v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j \right)_i \\ &= \left(v_{j+1} - \frac{j}{j+1} u_j \right)_i \\ &= \begin{cases} 0 - \frac{j}{j+1} \frac{(-1)^{j+i}}{j} & i \leq j \\ 1 - \frac{j}{j+1} & i = j+1 \\ 1 - 0 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{(j+1)+i}}{j+1} & i \leq j+1 \\ 1 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases}. \end{aligned}$$

La matrice R'' est

$$R''_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{j}{j+1} & i = j-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}.$$

Nous avons $A = A''R''$ comme désiré. Afin de normaliser les colonnes de A'', nous multiplions la j-ième colonne u_j de A'' par $||u_j||^{-1}$ et la j-ième ligne de R'' par $||u_j||$. Ceci nous donne

$$A''R'' = \underbrace{A'' \begin{pmatrix} ||u_1||^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & ||u_n||^{-1} \end{pmatrix}}_{=:A'} \underbrace{\begin{pmatrix} ||u_1|| & & \\ & \ddots & \\ & & ||u_n|| \end{pmatrix} R''}_{R'} .$$

Finalement, on a

$$A'_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \left(j(j+1)\right)^{-1/2} & i \leq j \\ \sqrt{\frac{j}{j+1}} & i = j+1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et

$$R'_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{j-1}{j}} & i = j-1 \\ \sqrt{\frac{j+1}{j}} & i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} .$$

Pour la partie 1., ceci implique que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/12} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & -\sqrt{1/12} \\ 0 & \sqrt{2/3} & \sqrt{1/12} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $dist(u, V) = \min_{v \in V} ||u - v||$, où la norme $|| \cdot ||$ est par raport au produit scalaire ordinaire.

Solution. *Soit $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. La distance entre un vecteur u et un sous-espace V est par définition $\min_{v \in V} ||u - v||$. En posant*

$$A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{Ax|\ x \in \mathbb{R}^3\}$, *donc* $min_{v\in V} \|u-v\| = \min_{x\in\mathbb{R}^3} \|u - Ax\|$. *On sait du cours que la solution* $x^\star$ *du système* $A^TAx = A^Tu$ *est un vecteur tel que* $\|u-Ax\|$ *est minimisée. Donc il suffit de résoudre ce sytème et alors* $\|Ax^\star - u\|$ *est la réponse voulue.*

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^Tu = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad (A^TA)^{-1}A^Tu = x^\star = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\|Ax^\star - u\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

est la réponse voulue.

Preuve alternative: On applique le procédé de Gram-Schmidt sur v_1, v_2, v_3, u *pour obtenir une base orthogonale* v_1', v_2', v_3', u'*. Alors,* $u = u' + x$*, où* $x \in \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$ *et* $\|u'\| = dist(u, V)$ *avec le théorème 2.21.*

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|^2$ satisfait

- ☐ *a)* $x_2 = 3$.
- ☐ *b)* $x_2 = -3$.
- ☐ *c)* $x_2 = 4$.
- ☐ *d)* $x_2 = -4$.

Solution. *Réponse d. On utilise Gram-Schmidt comme dans le théorème 2.21 ou bien on résoud le système* $A^TAx = A^Tb$ *pour trouver la solution*

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

De manière alternative, on peut étudier $\|Ax - b\|^2$ *en remplaçant* x_2 *par* 3, -3, 4 *et* -4*, ce qui donne quatre polynômes du second degré avec variable* x_1*. On trouve alors que le polynôme avec* $x_2 = -4$ *possède l'unique minimum global minimal parmi les quatre polynômes.*

Exercice 5. Montrer le Lemme 4.2 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit λ une valeur propre de A avec le vecteur propre x correspondant. Montrer que λ est réel.

Solution. *On a que*

$$\begin{aligned}
\lambda x^T\overline{x} &= (\lambda x)^T\overline{x}\\
&= (Ax)^T\overline{x}\\
&= x^T A^T\overline{x}\\
&= x^T\overline{\overline{A^T}x}\\
&= x^T\overline{A^*x}\\
&= x^T\overline{Ax}\\
&= x^T\overline{\lambda x}\\
&= \overline{\lambda}x^T\overline{x}
\end{aligned}$$

Comme $x^T\overline{x} \neq 0$, *on a* $\lambda = \overline{\lambda}$, *donc* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).
2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Solution. *Le cas réel est un cas particulier du cas complexe. On prouve donc uniquement le cas complexe.*

Soit donc $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$, $u_i \in \mathbb{C}^n$ $\forall i$ *tels que les colonnes* $\{u_1, ..., u_n\}$ *de* U *forment une base orthonormale par rapport au produit hermitien standard, c'est-à-dire*

$$u_i^T\overline{u_j} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

On a alors que

$$U^*U = \begin{pmatrix} \overline{u_1}^T \\ \vdots \\ \overline{u_n}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = I_n$$

Ceci implique que U *est inversible d'inverse* $U^{-1} = U^*$, *i.e.* U *est unitaire. En particulier, si on écrit*

$$U = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

où v_i^T *est la i-ème ligne de* U, *on a que*

$$I_n = UU^* = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \dots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$v_i^T \overline{v_j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des lignes $\{v_1, ..., v_n\}$ de U forme donc un ensemble orthonormal. En particulier, c'est un ensemble libre et donc une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ (et si $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, c'est aussi une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$).

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors toutes les valeurs propres de A^{-1} sont aussi positives.

Solution. *Supposons que les valeurs propres de A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sont positives. On va montrer que $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ sont les valeurs propres de A^{-1}:*

Comme A est une matrice hermitienne, il existe une matrice unitaire P telle que $P^*AP = D$, où D est une matrice diagonale.

Comme $det(P^*)det(P) = 1$,

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det(P^*)det(A - \lambda I)det(P) \\ &= det\left(P^*(A - \lambda I)P\right) \\ &= det\left(P^*AP - \lambda P^*P\right) \\ &= det(D - \lambda I), \end{aligned}$$

donc D a les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale. Alors

$$I = P^*P = P^*AA^{-1}P = P^*APP^*A^{-1}P = D(P^*A^{-1}P).$$

Ça signifie que $P^*A^{-1}P = D^{-1}$, et les valeurs propres de A^{-1} sont exactement les valeurs propres de D^{-1} à savoir $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$.

Exercice 8. (*)

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ linéairement indépendants. Montrer que

   $$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

   Rappel: Si V est un espace vectoriel sur un corps K, son espace dual V^* est l'ensemble des applications linéaires $\phi : V \longrightarrow K$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles.

Solution.