Exercice 7.1. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques. On suppose que X est non vide, que Y est connexe et que l'application f est est ouverte et propre. Montrer qu'alors f est surjective. Montrer ensuite que chacune des 3 hypothèses est nécessaire à la conclusion. (Une application continue entre deux espaces topologiques est dite propre si l'image inverse de tout compact est compact).

Solution 7.1. On rappelle qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est *continue* si l'image inverse d'un ouvert de Y est un ouvert de X. Elle est dite *propre* si l'image inverse d'un compact de Y est un compact de X. Enfin elle est dite *ouverte* si l'image directe d'un ouvert de X est un ouvert de Y. Rappelons également qu'une partie K de X est compacte si et seulement si elle est séquentiellement compacte (car X est un espace métrique).

Dire que $f : X \to Y$ est surjective revient à dire que $f(X) = Y$, et comme Y est supposé connexe il suffit de montrer que $f(X) \subset Y$ est non vide, ouvert et fermé. Il est clair que $f(X) \neq \emptyset$ car $X \neq \emptyset$, et il est clair que $f(X) \subset Y$ est un ouvert de Y puisque X est ouvert dans lui-même et on a supposé que f est une application ouverte. Il reste à montrer que $f(X)$ est fermé dans Y, c'est-à-dire que tout point $z \in Y$ qui est point d'accumulation de $f(x)$ appartient à $f(X)$. Soit donc $z \in \overline{f(X)}$ un tel point. Alors il existe par définition une suite $\{y_i\}_{i\geq 1} \subset f(X)$ qui converge vers z. On note $S = \{z\} \cup \{y_i\}_{i\geq 1}$, c'est clairement un sous-ensemble compact de Y et donc $f^{-1}(S) \subset X$ est compact puisque l'application f est propre. Choisissons arbitrairement un point $x_i \in f^{-1}(y_i)$. Alors la suite $\{x_i\}_{i\geq 1}$ est une suite de points de $f^{-1}(S)$ et donc elle contient une sous-suite convergente- Notons $x_{i'}$ cette sous-suite et $x = \lim_{i'\to\infty} x_{i'}$ sa limite. Nous affirmons que $f(x) = z$; en effet, si on note $y_{i'} = f(x_{i'})$, alors on a

$$f(x) = f\left(\lim_{i'\to\infty} x_{i'}\right) = \lim_{i'\to\infty} f(x_{i'}) = \lim_{i'\to\infty} y_{i'} = z$$

(on a utilisé la continuité de f et le fait que si la suite $\{y_i\}$ converge vers z alors il en est de même pour toute sous-suite). On a prouvé que $z = f(x)$, donc $f(X)$ est fermé dans Y ce qui conclut notre preuve.

Nous devons encore montrer que les 3 hypothèses sont nécessaires, ce qui suit des exemples simples suivants :

Exemple 1. Si $Y = \mathbb{R}$, X est l'intervalle ouvert $(0, 1)$ et $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ est le plongement canonique (i.e. $f(x) = x$), alors l'application f est continue, ouverte mais elle n'est pas propre. Elle n'est pas non plus surjective.

Exemple 2. Si $Y = \mathbb{R}$, X est l'intervalle fermé $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est le plongement canonique, alors l'application f est continue, propre mais elle n'est pas ouverte. Elle n'est pas surjective.

Exemple 3. Si $Y = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, X est la demi-droite ouverte $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ et $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^*$ est le plongement canonique, alors l'application f est continue, propre et ouverte. Mais Y n'est pas connexe et f n'est pas surjective.

Exercice 7.2. Montrer que si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés riemanniennes, alors il existe une unique métrique Riemannienne sur $M_1 \times M_2$ telle que M_1 et M_2 soient plongées isométriquement et orthogonalement en chaque point dans $M_1 \times M_2$.
Montrer ensuite que si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont complètes, alors $M_1 \times M_2$ est compète pour cette métrique.

Solution 7.2. Le plus simple est de donner la formule pour le tenseur métrique dans une carte qui est produit d'une carte pour M_1 et une carte pour M_2. Soit donc $p = (p_1, p_2)$ un point de $M = M_1 \times M_2$, et soit $U_1 \subset M_1$ un domaine de coordonnées $x^1, \dots, x^m$ au voisinage de p_1 et $U_2 \subset M_2$ un domaine de coordonnées $y^1, \dots, y^n$ au voisinage de p_2. Dans ces voisinages, on a

$$g_1 = \sum_{i,j=1}^{m} g'_{ij}(x) dx^i dx^j \quad \text{et} \quad g_2 = \sum_{r,s=1}^{n} g''_{rs}(y) dy^r dy^s$$

Alors $U = U_1 \times U_2 \subset M$ est un voisinage de $p \in M$ muni de coordonnées $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n$, et la métrique désirée sur ce voisinage est

$$g = g_1 + g_2 = \sum_{i,j=1}^{m} g'_{ij}(x)dx^i dx^j + \sum_{r,s=1}^{n} g''_{rs}(y)dy^r dy^s$$

Cette métrique est caractérisée par les propriétés suivantes ; si $X = X_1 + X_2 \in T_pM$ est un vecteur tangent en p à M tel que $X_1 \in T_{p_1}M_1$ et $X_2 \in T_{p_2}M_2$, alors

$$g(X_1, X_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \|X\|_g = \sqrt{\|X_1\|^2_{g_1} + \|X_2\|^2_{g_2}}$$

En chaque point, $T_pM = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$ est donc une somme directe orthogonale.

En considérant la formule qui donne les symboles de Christoffel d'une métrique riemannienne, on voit que l'équation des géodésiques dans le voisinage $U = U_1 \times U_2$ se découple en deux systèmes :

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma'^k_{ij}\dot{x}\dot{x}^j = 0, \qquad \ddot{y}^t + \sum_{r,s=1}^{n} \Gamma''^t_{rs}\dot{x}\dot{x}^j = 0.$$

Cela implique que γ est une géodésique de M i et seulement si ses projections sur M_1 et M_2 sont géodésiques. En supposant que M_1 et M_2 sont complètes, on sait qu'on peut prolonger toutes géodésiques de M_1 et de M_2 sur tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Donc toute géodésique de M se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier. Cela montre que $(M.g)$ est géodésiquement complet et donc métriquement complet par Hopf-Rinow.

Exercice 7.3. Montrer qu'une variété riemannienne homogène (i.e telle qu'il existe un groupe d'isométries agissant transitivement) est complète.

Solution 7.3. On sait que pour tout point p d'une variété Riemannienne (M, g) il existe $\delta > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B(p,\delta)}$ est compacte (expliquer pourquoi c'est vrai).
Avec cette remarque, on peut facilement montrer que si (M, g) est homogène, alors elle est complète. En effet, soit $\{x_i\} \subset M$ une suite de Cauchy, alors il existe un entier N tel que si $i, j \geq N$ alors $d(x_i, x_j) \leq \delta$. Par hypothèse il existe une isométrie $\phi : M \to M$ telle que $\phi(x_N) = p$. Notons $y_i = \phi(x_i)$, alors $\{y_i\} \subset M$ est une suite de Cauchy et pour tout $i \geq N$, on a

$$d(p, y_i) = d(\phi(x_N), \phi(x_i)) = d(x_N, x_i) \leq \delta.$$

Donc $\{y_i\}_{\geq N}$ est une suite contenue dans le compact $\overline{B(p,\delta)}$, et il existe donc une sous-suite convergente. Mais toute suite de Cauchy qui contient une sous-suite convergente est elle-même une suite convergente. Donc il existe $y \in \overline{B(p,\delta)}$ tel que $\lim_{i\to\infty} y_i = y$ et par conséquent le point $x = \phi^{-1}(y)$ vérifie

$$x = \phi^{-1}(y) = \phi^{-1}(\lim_{i\to\infty} y_i) = \lim_{i'\to\infty} \phi^{-1}(y_i) = \lim_{i\to\infty} x_i.$$

On a montré que toute suite de Cauchy $\{x_i\}$ de M est convergente.

Un autre argument consiste à montrer qu'on peut prolonger toute géodésique sur $\mathbb{R}$ tout entier (montrer d'abord que le rayon d'injectivité d'une variété homogène est le même en chaque point).

Exercice 7.4. On dit qu'une variété riemannienne (M, g) est *isotrope* si pour tout point p le groupe des isométries de M qui fixent p (i.e. le stabilisateur du point p dans le groupe $\mathrm{Isom}(M)$) agit transitivement sur les vecteurs de norme 1 de T_pM :

$$\forall p \in M,\ \forall v, w \in T_pM :\ \|v\| = \|w\| \ \Rightarrow\ \exists \varphi \in \mathrm{Isom}(M, g) \text{ t.q. } \varphi(p) = p \text{ et } d\varphi_p(v) = w.$$

a) Donner des exemples de variétés isotropes.

b) Démontrer que toute variété riemannienne connexe (M, g) complète et isotrope en chaque point est homogène.
Indication : étant donné deux points, considérer le milieu d'une géodésique qui joint p à q.

c) Donner un exemple de variété Riemannienne qui est homogène mais qui n'est pas isotrope.

Solution 7.4. (a) L'espace euclidien, la sphère standard ou l'espace projectif, l'espace hyperbolique sont des exemples de variétés riemanniennes isotropes.

(b) On doit montrer que pour toute paire de points $p, q \in M$ il existe une isométrie qui envoie p sur q. Comme (M, g) est connexe et complète, on sait par le théorème de Hopf-Rinow qu'il existe une géodésique γ qui relie p à q. Quitte à reparamétrer cette courbe, on peut supposer que $\gamma : [-1, 1] \to M$ et $\gamma(-1) = p$, $\gamma(1) = q$. Notons $m = \gamma(0) \in M$ et $v = \dot{\gamma}(0) \in T_mM$. Puisque M est isotrope, on peut trouver une isométrie $\phi : M \to M$ telle que $\phi(m) = m$ et $d\phi_m(v) = -v$.
Il est clair d'une part que $\gamma(t) = \exp_m(tv)$ et d'autre part que $\beta = \phi \circ \gamma$ est la géodésique telle que $\beta(0) = m$ et

$$\dot{\beta}(0) = d\phi_m(\dot{\gamma}(0)) = d\phi_m(v) = -v,$$

ce qui implique que $\beta(t) = \exp_m(tv) = \gamma(-t)$. En conclusion, on a montré que

$$q = \gamma(1) = \beta(-1) = \phi(\gamma(-1)) = \phi(p).$$

Pour toute paire de point p, q de M on a construit ne isométrie ϕ telle que $\phi(p) = q$.

(c) Un cylindre $M = \mathbb{R} \times S^1$ (avec la métrique produit $g = dx^2 + d\theta^2$) est homogène mais pas isotrope (expliquer pourquoi).

Exercice 7.5. Démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : *Soit $f : M \to N$ une isométrie locale entre deux variétés Riemanniennes (M, g) et (N, h). Si (M, g) est complète et N est connexe, alors f est un revêtement. De plus, (N, h) est également complète.*

Indication : L'exercice 6.4 est utile.

Solution 7.5. Rappelons qu'une application continue $f : \tilde{X} \to X$ entre deux espaces topologiques est un *revêtement* (en anglais on dit *covering map*, en français un recouvrement c'est autre chose) si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert $U \subset X$ dont la préimage $f^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ est une réunion d'ouverts deux-à-deux disjoints de $\tilde{X}$ tels que la restriction de f à chacun de ces ouverts est un homéomorphisme sur U (en anglais on dit qu'un tel ouvert $U \subset X$ est *evenly covered by the map f*).

Pour résoudre l'exercice, on montre que toute boule d'injectivité de N vérifie la condition de la définition. On a besoin de quelques notations. Soit q un point quelconque de N et $0 < \delta < \iota(q)$ (le rayon d'injectivité en q). On note

$$U(\delta) = \{v \in T_qN \mid \|v\| < \delta\} \subset T_qN \quad \text{et} \quad B(q, \delta) = \{y \in N \mid d_N(q, y) < \delta\} \subset N.$$

L'exponentielle $\exp_q$ définit alors un difféomorphisme $\exp_q : U(\delta) \to B(q, \delta)$ (car δ est inférieur au rayon d'injectivité en q). Considérons maintenant un point $p \in f^{-1}(q) \subset M$, et notons

$$\tilde{U}(\delta) = \{w \in T_pM \mid \|w\| < \delta\} \subset T_pM \quad \text{et} \quad \tilde{B}(p, \delta) = \{x \in M \mid d_M(p, x) < \delta\} \subset M.$$

L'application $\exp_p$ est bien définie sur tout l'espace tangent T_pM car on a supposé que la variété M est complète. Il est alors clair que $\exp_p(\tilde{U}(\delta)) \subset \tilde{B}(p, \delta)$ (par exemple à cause du Lemme de Gauss). D'autre part f est une isométrie locale telle que $f(p) = q$, donc $f(\tilde{B}(p, \delta)) \subset B(q, \delta)$ et on a le diagramme commutatif suivant par l'exercice 6.4 :

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[r, "df_p"] \arrow[d, "\exp_p"'] & U \arrow[d, "\exp_q"] \\ \tilde{B} \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

On observe les propriétés suivantes :

(i) $\exp_q : U \to B$ est un difféomorphisme par construction.

(ii) $df_p : T_pM \to T_qN$ est une isométrie linéaire entre deux espaces euclidiens, donc sa restriction à une boule de rayon δ est aussi bijective. Par conséquent $df_p : \tilde{U} \to U$ est aussi un difféomorphisme.

(iii) $\exp_p : \tilde{U} \to \tilde{B}$ est surjective, par une application de Hopf-Rinow.

(iv) $\exp_p : \tilde{U} \to \tilde{B}$ est injective car $\exp_q \circ df_p$ est injective (et même bijective).

On en conclut que
$$f = \exp_p \circ f \circ \exp_q^{-1} : \tilde{B}B$$
est bijective car la composition de 3 bijections. C'est donc un homéomorphisme car c'est une bijection qui est continue et ouverte (c'est même une isométrie entre ces deux boules).
Remarquons que cet argument nous montre aussi que $\tilde{B}(p, \delta)$ est une boule d'injectivité dans M.

Nous devons encore montrer que si p_1 et p_2 sont deux éléments distincts de $f^{-1}(q)$ alors $B(p_1, \delta) \cap B(p_2, \delta) = \emptyset$. Supposons par l'absurde qu'il existe $z \in \tilde{B}(p_1, \delta) \cap \tilde{B}(p_2, \delta)$.
Alors dans $\tilde{B}(p_1, \delta)$ il existe une géodésiques minimale γ_1 reliant p_1 à z, de même dans $\tilde{B}(p_2, \delta)$ il existe une géodésiques minimale γ_2 reliant p_2 à z. Alors $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ sont deux géodésiques minimales distinctes dans $B(p, \delta)$ qui relient le point $q = f(p_1) = f(p_2)$ au point $f(z)$. Mais ceci est impossible car on ne peut pas avoir localement 2 géodésiques minimisantes dans une boule d'injectivité. On a prouvé que f est un revêtement. En particulier f est surjective si N est connexe.

Montrons maintenant que (N, h) est géodésiquement complète. Soit $\gamma : I \to N$ une géodésique de N; on suppose $0 \in I$. Choisissons un point $p \in f^{-1}\gamma(0)$ et notons $v \in T_pM$ le vecteur défini par $v = df_p^{-1}(\dot{\gamma}(0))$, i.e. $df_p(v) = \dot{\gamma}(0)$. Par hypothèse M est complète, donc la géodésique $\tilde{\gamma}(t) = \exp_p(tv)$ est une géodésique complète, i.e. bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On vérifie sans difficultés que la projection $f \circ \tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to N$ est une géodésique complète dont la restriction à I coïncide avec γ. On a prouvé que toute géodésique de N se prolonge en une géodésique complète, donc la variété N est bien complète.