Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 8 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Solution. *A est une matrice symétrique donc il existe une matrice orthogonale P telle que*

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A. Soit D la matrice $P^T AP$ diagonale. Comme A est définie positive, on a $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1\ldots, n$ et alors $D = C^T C$, où

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Comme $P^T = P^{-1}$, on obtient que

$$A = PDP^T = PC^T CP^T = PC^T P^T PCP^T = (PC^T P^T)(PCP^T) = (PCP^T)^T (PCP^T).$$

ainsi $A = B^T B$, où $B = PCP^T$. Il reste à montrer que B est vraiment symétrique et définie positive. Les valeurs propres de B sont les mêmes de que les valeurs propres de C, donc B est définie positive. De plus,

$$B^T = (PCP^T)^T = (P^T)^T C^T P^T = PCP^T = B.$$

Exercice 2. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une matrice unitaire $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ telle que $P^* \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. Les éléments de la matrice P sont de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution. *Le polynôme caractéristique de A est*

$$p(x) = det(A - xI) = (x+1)(x-6)(x+2).$$

Les valeurs propres de A sont donc $-1, 6$ et -2. On trouve les bases des espaces propres

$$\lambda_1 = -1 : \qquad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6 : \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1-21i \\ 6-9i \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 : \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1+3i \\ -2-i \\ 5 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs b_1, b_2, b_3 sont deux-à-deux orthogonaux, parce que les valeurs propres sont distinctes. Il reste à les normaliser et on obtient

$$p_1 = b_1/||b_1|| = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = b_2/||b_2|| = \frac{1}{\sqrt{728}} \begin{bmatrix} 1-21i \\ 6-9i \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = b_3/||b_3|| = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{bmatrix} 1+3i \\ -2-i \\ 5 \end{bmatrix}$$

On obtient la matrice unitaire

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

et on peut vérifier que

$$P^* \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Solution.

a) On a que $Q(x) = x^T Ax$ *où* $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. *L'équation charactéristique de* A *est*

$$0 = \det(A - \lambda I) = (13 - \lambda)(7 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 15)(\lambda - 5)$$

ainsi les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = 15$ *et* $\lambda_2 = 5$. *Comme toutes les valeurs propres de* A *sont positives,* A *est définie positive, et donc la forme quadratique* Q *est définie positive.*

b) Similairement, $Q(x) = x^T Ax$ *où* $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. *Comme en a), on trouve que l'équation charactéristique de* A *est*

$$0 = \det(A - \lambda I) = (11 - \lambda)(-1 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = (\lambda - 15)(\lambda + 5)$$

et les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = 15$ *et* $\lambda_2 = -5$. *Cela signifie que* A *et* $Q(x)$ *sont indéfinies. Pour trouver des vecteurs* x *et* y *qui satisfont* $Q(x) > 0$ *et* $Q(y) < 0$, *on cherche les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres* λ_1 *et* λ_2. *On trouve* $x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Finalement, on vérifie que* x *et* y *sont les vecteurs satisfaisant:*

$$Q(x) = x^T Ax = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{30}{\sqrt{5}} \\ \frac{15}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 15 > 0$$

et similairement

$$Q(y) = y^T Ay = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{5}} \\ \frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -5 < 0.$$

Exercice 4. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6, donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution.

(i) $A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 9$, *et* $\lambda_2 = 1$ *(on veut* $\lambda_1 \geq \lambda_2$*). Ainsi les valeurs singulières de* A_1 *sont données par* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, *i.e.,* $\sigma_1 = 3$ *et* $\sigma_2 = 1$.

(ii) $A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et les valeurs singulières sont* $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$ *et* $\sigma_2 = 0$.

(iii) $A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$ *et le polynôme caractéristique est* $p_{A_3^T A_3}(\lambda) = \lambda^2 - 100\lambda + 900 = (\lambda - 90)(\lambda - 10)$. *Les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 90$ *et* $\lambda_2 = 10$. *Les valeurs singulières de* A_3 *sont* $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ *et* $\sigma_2 = \sqrt{10}$, *ainsi la matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *est donnée par*

$$D = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. *On commence par trouver une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^2$, *où pour* $i = 1, 2$

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On doit donc trouver un vecteur v_3 *normalisé et orthogonal à* v_1 *et* v_2. *On trouve, par exemple,*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(iv) $A_4^T A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 3$ *et* $\lambda_2 = 2$*. Les valeurs singulières de* A_3 *sont* $\sigma_1 = \sqrt{3}$ *et* $\sigma_2 = \sqrt{2}$*, ainsi la matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *est donnée par*

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$*. On commence par trouver*

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a que (v_1, v_2) *n'est pas une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$*, on doit donc trouver un vecteur* v_3 *normalisé et orthogonal à* v_1 *et* v_2*. On trouve, par exemple,*

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(v) On a $A_5^T A_5 = (9)$ *et avec comme seule valeur propre* $\lambda_1 = 9$*. Le vecteur propre normalisé associé à* $\lambda_1 = 9$ *est* $v_1 = 1$*. Ainsi* $Q = (1)$*. La matrice*

$D \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ est donnée par $D = (3\ \ 0\ \ 0)^T$. Pour la matrice P, on commence par trouver

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_5 u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant compléter (v_1) en une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$. On complète (v_1) par $v_2 = \frac{1}{3}(2\ \ -1\ \ 2)^T$ et $v_3 = \frac{1}{3}(2\ \ 2\ \ -1)^T$. On obtient

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(vi) On calcule la SVD de $(A_6)^T$. On commence par calculer $(A_6^T)^T A_6^T$: $(A_6^T)^T A_6^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1 = 25$ et $\lambda_2 = 9$. La matrice D est

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs v_1 et v_2 sont donnés par

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On complète en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ avec

$$v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a que $A^T = PDQ$. La SVD pour A est donnée par $A = (PDQ)^T = Q^T D P^T$.

Exercice 5. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.

2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Solution.

1. *C'est vrai. Pour trouver une décomposition en SVD, on doit diagonaliser A^TA, où $A^TA = I_n$. Ainsi, les valeurs propres sont $\lambda_i = 1$ et les vecteurs propres de A^TA sont les vecteurs e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ainsi $Q = I_n$. La matrice $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonale avec les $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ sur la diagonale. Ainsi, $D = I_n$ et on obtient*
$$A = PDQ = PI_nI_n,$$
et la seule solution pour la matrice P est $P = A$.

2. *C'est faux. En effet, les valeurs singulières sont toujours positives, et on les obtient avec $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$, où λ_i sont les valeurs propres de $A^TA = A^2$. Les valeurs singulières sont les valeurs absolues des valeurs propres non nulles λ_i.*

Exercice 6. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non négatifs, c'est-à-dire $\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Rappel: Soit $K = \{l_1, \dots, l_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ où $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k \leq n$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est la matrice $(B_K)_{ij} = A_{l_il_j}, 1 \leq i, j \leq k$.

Solution.