Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 10

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Trouver la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1.\,(+)\ x_1 + x_2 = b_1\,, \quad 2. \begin{cases} x_1 = b_1\,, \\ x_1 = b_2\,, \\ x_1 = b_3\,, \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 4x_1 = b_1\,, \\ 0x_1 = b_2\,, \\ 7x_3 = b_3\,, \\ 0x_2 = b_4\,. \end{cases}$$

Exercice 2. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace de dimension 1 $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a \in M} \mathrm{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que

$$||AB||_F \leq ||A||_F ||B||_F$$

Exercice 4.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que

$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a
$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme
$$A = URV, \qquad\qquad U \in \mathbb{R}^{m\times r},\ R \in \mathbb{R}^{r\times r},\ V \in \mathbb{R}^{r\times d},$$
où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Exercice 5. Montrer Lemme 5.3 dans la polycopié:
On considère le système suivant
$$\begin{array}{rcll} \mathrm{x}_1'(t) & = & a_{11}\mathrm{x}_1(t) & +\cdots+ \quad a_{1n}\mathrm{x}_n(t) \\ \mathrm{x}_2'(t) & = & a_{21}\mathrm{x}_1(t) & +\cdots+ \quad a_{2n}\mathrm{x}_n(t) \\ & \vdots & & \\ \mathrm{x}_n'(t) & = & a_{n1}\mathrm{x}_1(t) & +\cdots+ \quad a_{nn}\mathrm{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$
où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathrm{x}\colon \mathrm{x} \text{ est une solution du système } (1)\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Exercice 7. Montrer Lemme 5.12 dans la polycopié:
Pour $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si $A \cdot B = B \cdot A$ on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Exercice 8. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $f(x) = x^T Ax$ la forme quadratique correspondante à A. Soit
$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$
une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$ on a
$$\max_{\substack{x\in S^{n-1} \\ x\perp u_1,\dots,x\perp u_\ell}} f(x) = \lambda_{\ell+1} \tag{2}$$
et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.