8.1. Montrer que le tenseur de Ricci est symétrique : $R(X,Y) = R(Y,X)$.

8.2. Exprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionnelle de g.

8.3. On considère le cas d'une surface riemannienne (S,g). On suppose que la métrique est donnée en "coordonnées polaires" par

$$g = dr^2 + f(r,\theta)^2 d\theta^2.$$

(a) Montrer que la courbure sectionnelle est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + Kf = 0.$$

Cette équation s'appelle l'équation de Jacobi dans le cas des surfaces. Elle réapparaîtra dans le cours dans le cas général.

(b) Justifier que

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = 1.$$

pour tout θ.

(c) Déduire de l'exercice 6.3 la valeur de la courbure du plan hyperbolique.

(d) Donner une expression (en coordonnées polaires) de toutes les métriques à courbure constante sur une surface.

(e) Prouver le théorème de Minding: deux surfaces de mêmes courbures constantes sont localement isométriques. Sont elles globalement isométriques ?

8.4. Que valent les courbures (sectionnelle, de Ricci et scalaire) de la sphère unité $\mathbb{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$?

8.5. Montrer que si la courbure sectionnelle d'une variété Riemannienne (M,g) est constante, égale à K, alors on a pour tout $p \in M$ et tous $X, Y, Z, W \in T_pM$:

$$R(X,Y,Z,W) = K \cdot (g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)).$$