Algèbre linéaire avancée II
printemps 2021

Série 9

Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Piazza 2 semaines après. La solution de l'exercice (*) sera discutée dans les séances d'exercices du mardi. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est définie négative, si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$.

b) Montrer que A est semi-définie négative, si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1,\ldots,n\}$.

Exercice 2. Montrer la partie (4.5) du Théorème 4.13: Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Exercice 3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec une decomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. La pseudoinverse de A est définie comme $A^+ = Q^*D^+P^*$, où D^+ est la matrice définie dans la Définition 4.8. Montrer que A^+ satisfait les quatre conditions de Penrose:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(AA^+)^* = AA^+$.
4. $(A^+A)^* = A^+A$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer les propriétés suivantes de la matrice pseudoinverse:

1. $(A^+)^+ = A$.

2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

Exercice 5. Calculer la matrice pseudoinverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?

Exercice 7. (*) Dans cet exercice, les termes orthogonaux et orthonormaux sont relatifs au produit hermitien standard de $\mathbb{C}^n$.

1. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres de A, $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ et $\lambda \neq \mu$, alors x et y sont orthogonaux.

2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base orthonormale des vecteurs propres de A, avec $Av_i = \lambda_i v_i$, pour $1 \leq i \leq n$. Soit $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $P^*P = I_n$ et

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3. Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et P une matrice unitaire telles que

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Montrer que les colonnes $u_1, \ldots, u_n$ de P sont des vecteurs propres de A avec les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.