Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 9 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

a) (+) Montrer que A est définie négative, si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$.

b) Montrer que A est semi-définie négative, si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1,\ldots,n\}$.

Solution.

a) *D'abord, on note que A est définie négative si et seulement si la matrice $-A$ est définie positive. C'est parce que pour tout x non nul $x^TAx < 0$ si et seulement si $x^T(-A)x > 0$.*

Par Théorème 4.11, $(-A)$ est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs, c'est-à-dire det$(-B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, où $(-B_k)_{ij} = -A_{ij}$, $1 \leq i,j \leq k$. Cependant, par les propriétés basiques du déterminant, $\det(-B_k) = (-1)^k \det(B_k)$ parce que B_k est une matrice de taille $k \times k$. On conclut que A est définie négative si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) \geq 0$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$.

b) *Comme dans partie a), A est semi-définie négative si et seulement si la matrice $-A$ est semi-définie positive. Par l'exercice étoile de la dernière semaine, on voit que $(-A)$ est semi-définie positive si et seulement si pour tout $K = \{l_1,\ldots,l_k\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq n$ on a que $\det(-B_K) \geq 0$ où $(-B_K)_{ij} = (-A)_{l_il_j}$, $1 \leq i,j, \leq k$. Comme $\det(-B_K) = (-1)^{|K|}\det(B_K)$, on conclut que A est semi-définie négative si et seulement si $(-1)^{|K|}\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1,\ldots,n\}$.*

Exercice 2. Montrer la partie (4.5) du Théorème 4.13: Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Solution. *Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ respectivement. On fixe un entier k. Soit U un espace de dimension $n-k+1$. Clairement, $span\{u_1, \ldots, u_k\} \cap (U \cap S^{n-1}) \supsetneq \{0\}$, alors il existe un vecteur $0 \neq x = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \in (U \cap S^{n-1})$. Comme*

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k,$$

on a que $\max_{x\in(U\cap S^{n-1})} x^T Ax \geq \lambda_k$. Comme c'est vrai pour chaque U de dimension $n-k+1$, on conclut que

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in(U\cap S^{n-1})} x^T Ax \geq \lambda_k.$$

Si on prend $W = span\{u_k, \ldots, u_n\}$, pour chaque vecteur $x = \sum_{i=k}^n \beta_i u_i \in W \cap S^{n-1}$ (c.a.d. $\sum_{i=k}^n \beta_i^2 = 1$), on a

$$x^T Ax = \sum_{i=k}^n \beta_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k$$

et $u_k^T Au_k = \lambda_k$. Donc $\max_{x\in W\cap S^{n-1}} x^T Ax = \lambda_k$ et

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax \leq \max_{x\in W\cap S^{n-1}} x^T Ax = \lambda_k.$$

Finalement, on conclut que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x).$$

Exercice 3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec une decomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. La pseudoinverse de A est définie comme $A^+ = Q^* D^+ P^*$, où D^+ est la matrice définie dans la Définition 4.8. Montrer que A^+ satisfait les quatre conditions de Penrose:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(AA^+)^* = AA^+$.
4. $(A^+A)^* = A^+A$.

Solution.

1. $AA^+A = PDQQ^*D^+P^*PDQ = PDD^+DQ = PDQ = A.$

2. $A^+AA^+ = Q^*D^+P^*PDQQ^*D^+P^* = Q^*D^+DD^+P^* = P^*D^+Q^* = A^+$.

3. $(AA^+)^* = (PDQQ^*D^+P^*)^* = (PDD^+P^*)^* = P(DD^+)^*P^* = P(DD^+)P^* = PDQQ^*D^+P^* = AA^+$.

4. $(A^+A)^* = (Q^*D^+P^*PDQ)^* = (Q^*D^+DQ)^* = Q^*(D^+D)^*Q = Q^*(D^+D)Q = Q^*D^+P^*PDQ = A^+A$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer les propriétés suivantes de la matrice pseudoinverse:

1. $(A^+)^+ = A$.
2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

Solution. *Par l'Exercice précédent et le Théorème 4.16, pour toute matrice $B \in K^{m\times n}$, la matrice pseudo-inverse B^+ est l'unique matrice de $X \in K^{n\times m}$ qui satisfait les quatre conditions de Penrose pour B :*

1. $BXB = B$.

2. $XBX = X$.

3. $(BX)^* = BX$.

4. $(XB)^* = XB$.

Pour montrer $(A^+)^+ = A$ (resp. $(A^+)^* = (A^*)^+$), il suffit de montrer que les deux matrices satisfont les quatre conditions de Penrose pour une même matrice B. On a par exemple pour le premier que

$$AA^+A = A\,,\ A^+AA^+ = A^+\,,\ (AA^+)^* = AA^+\,,\ (A^+A)^* = A^+A\,,$$

car A admet pour pseudo-inverse A^+, et

$$A^+(A^+)^+A^+ = A^+\,,\ (A^+)^+A^+(A^+)^+ = (A^+)^+\,,$$
$$(A^+(A^+)^+)^* = A^+(A^+)^+\,,\ ((A^+)^+A^+)^* = (A^+)^+A^+\,.$$

car A^+ admet pour pseudo-inverse $(A^+)^+$, i.e. $(A^+)^+$ et A satisfont les quatre conditions de Penrose pour A^+. Par unicité, on a égalité.

Exercice 5. Calculer la matrice pseudoinverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Solution.

1. *On commence par trouver une decomposition en valeurs singulières de A^T, $A^T = PDQ$. On trouve $AA^T = (3)$, donc $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $Q = 1$. Or, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et on trouve v_2, v_3 orthonormales par exemple comme*

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On pose $P = \begin{pmatrix} v_1, v_2, v_3 \end{pmatrix}$ et $A^T = PDQ$. Donc $A = Q^T DP^T$ et

$$A^+ = PD^+Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} .$$

2. *On a*

$$B^*B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Une base orthonormé de l'espace propre associé à le valeur 1 est donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Le vecteur propre associé à λ_3 est

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$Q = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

En fin on trouve

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} ,$$

avec

$$u_1 = \frac{Bv_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ u_2 = \frac{Bv_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Donc

$$B^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

3. *On a*

$$C^* C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

avec polynôme caractéristique $p_{C^*C}(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$. *On a donc* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 0$. *On cherche les vecteurs propres associés à les valeurs propres. Pour* $\lambda_1 = 2$ *on trouve*

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

et pour $\lambda_2 = 0$ *on trouve*

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Donc

$$Q = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Aprés on trouve

$$u_1 = Cv_1/\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

On complete u_1 *avec* u_2 *pour former une base orthonormé de* $\mathbb{R}^2$, *et donc*

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Donc

$$C^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 6. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?

Solution. *La réponse est non. On montre ça avec un contre-exemple. On considère*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On trouve

$$A^+ = (AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

On a donc

$$(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \neq B^+A^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 7. (*) Dans cet exercice, les thermes orthogonaux et orthonormaux sont relatif aux produit hermitien standard du $\mathbb{C}^n$.

1. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres de A, $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ et $\lambda \neq \mu$, alors x et y sont orthogonaux.

2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base orthonormale des vecteurs propres de A, avec $Av_i = \lambda_i v_i$, pour $1 \leq i \leq n$. Soit $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $P^*P = I_n$ et

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

3. Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et P une matrice unitaire telles que

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Montrer que les colonnes $u_1, \ldots, u_n$ de P sont des vecteurs propres de A avec les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Solution.