Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 10 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Trouver la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1.\,(+)\ x_1 + x_2 = b_1\,, \quad 2. \begin{cases} x_1 = b_1\,, \\ x_1 = b_2\,, \\ x_1 = b_3\,, \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 4x_1 = b_1\,, \\ 0x_1 = b_2\,, \\ 7x_3 = b_3\,, \\ 0x_2 = b_4\,. \end{cases}$$

Solution. *Soit $A \in K^{m\times n}$, $x \in K^{n\times 1}$, $b \in K^{m\times 1}$. La solution minimale du système $Ax = b$, est définie comme $x^+ = A^+b$. Elle satisfait $||Ax^+ - b||_2 \leq ||Ax - b||_2$, $\forall x \in K^{n\times 1}$.*

1. *La matrice associée au premier système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = 1\,,\ \ D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\,,\ \ Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

2. *La matrice associée au deuxième système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ Q = 1 .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3) .$$

3. *La matrice associée au troisième système est*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \begin{pmatrix} b_1/4 \\ 0 \\ b_3/7 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace de dimension 1 $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Solution. *Soit A la matrice dont les lignes sont les points de M, i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par le Théorème 3.20 du cours, nous devons trouver une décomposition $A^T A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) U^T$, et la colonne de U correspondant à la valeur propre la plus grande engendrera le sous-espace voulu. Ainsi, on diagonalise $A^T A$:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 26 & -20 \\ -20 & 26 \end{pmatrix} \\ \det(A^T A - \lambda I) &= (26 - \lambda)^2 - 400 \\ &= (\lambda - 46)(\lambda - 6) \\ \Rightarrow \qquad A^T A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & \\ & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc le sous-espace $H = \{ t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{R} \}$ est le sous-espace voulu et la valeur D est

$$D = \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H) = \sum_{a \in M} ||a||^2 - \frac{1}{2} \left(a^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^2 = 52 - 46 = 6.$$

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que

$$||AB||_F \leq ||A||_F ||B||_F$$

Solution. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et soit $x \in \mathbb{C}^n$. On commence par montrer que*

$$||Ax||_2 \leq ||A||_F ||x||_2.$$

Soient $A_1, \cdots, A_n$ les lignes de A. On a

$$\begin{aligned}
||Ax||_2 &= \left\| \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_n x \end{pmatrix} \right\|_2 \\
&= \sqrt{\langle A_1^\intercal, x\rangle^2 + \cdots + \langle A_n^\intercal, x\rangle^2} \\
&\leq \sqrt{||A_1||_2^2 ||x||_2^2 + \cdots + ||A_n||_2^2 ||x||_2^2} \\
&= \sqrt{||A_1||_2^2 + \cdots + ||A_n||_2^2}\, ||x||_2 \\
&= ||A||_F ||x||_2,
\end{aligned}$$

où l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz.

Soit $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient $b_1, \cdots, b_n$ les colonnes de la matrice B. Alors

$$\begin{aligned}
||AB||_F &= \left\| \begin{pmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_n \end{pmatrix} \right\|_F \\
&= \sqrt{||Ab_1||_2^2 + \cdots + ||Ab_n||_2^2} \\
&\leq \sqrt{||A||_F^2 ||b_1||_2^2 + \cdots + ||A||_F^2 ||b_n||_2^2} \quad \textit{par la première partie} \\
&= ||A||_F \sqrt{||b_1||_2^2 + \cdots + ||b_n||_2^2} \\
&= ||A||_F ||B||_F.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que

$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme

$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times r},\ R \in \mathbb{R}^{r\times r},\ V \in \mathbb{R}^{r\times d},$$

   où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Solution.

1. *Soit M_{ij} la matrice telle que $(M_{ij})_{ij} = 1$, et $(M_{ij})_{st} = 0$ si $(s,t) \neq (i,j)$. Alors, on peut réécrire $p_k q_k^T = \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij}$, et donc*

$$\begin{aligned}\sum_k p_k q_k^T &= \sum_k \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j \underbrace{\sum_k p_{ik} q_{kj}}_{(PQ)_{ij}} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (PQ)_{ij} M_{ij} \\ &= PQ.\end{aligned}$$

2. *On définit $Q' = DQ$, c'est-à-dire que l'on multiplie les lignes de Q par les valeurs singulières : $q_i'^T = \sigma_i q_i^T$. Ainsi,*

$$A = PDQ = PQ' = \sum_{i=1}^n p_i q_i'^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i p_i q_i^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i p_i q_i^T,$$

où la dernière égalité suit du fait que $\sigma_i = 0$ pour $i > r$.

3. *Dans la partie (2) on a vu qu'en fait il suffit de considérer les premières r colonnes de P et les premières r lignes de Q'. Il ne reste qu'à observer qu'on obtient les premières r lignes de Q', si l'on multiplie la sous-matrice des premières r lignes de Q par une matrice diagonale $r \times r$ avec les valeurs singulières sur la diagonale.*

Exercice 5. Montrer Lemme 5.3 dans la polycopié:

On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcrcr} \mathrm{x}_1'(t) &=& a_{11}\mathrm{x}_1(t) & +\cdots+ & a_{1n}\mathrm{x}_n(t) \\ \mathrm{x}_2'(t) &=& a_{21}\mathrm{x}_1(t) & +\cdots+ & a_{2n}\mathrm{x}_n(t) \\ & \vdots & & & \\ \mathrm{x}_n'(t) &=& a_{n1}\mathrm{x}_1(t) & +\cdots+ & a_{nn}\mathrm{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathrm{x} \colon \mathrm{x} \text{ est une solution du système (1)}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solution. *Soient $\mathrm{x}, \mathrm{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ avec $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathscr{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de système (1). Car $\mathrm{x} \in \mathscr{X}$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{x}(t) = A\mathrm{x}(t)$, et le même pour y. Donc,*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{x} + \alpha\mathrm{y})(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{x}(t) + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{y}(t) \\ &= A\mathrm{x}(t) + \alpha A\mathrm{y}(t) \\ &= A(\mathrm{x}(t) + \alpha\mathrm{y}(t)).\end{aligned}$$

Alors, $\mathscr{X}$ est complété sous addition et multiplication par un scalaire. Les autres propriétés resultant car $\mathscr{X}$ est une sous-ensemble de l'espace des fonctions differentielles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Solution. *Par définition, on a*

$$e^{tA} = I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}nt^{n-1}A^n + \cdots \\ &= 0 + A + \frac{1}{1!}tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \cdots \\ &= A(I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots) \\ &= Ae^{At}.\end{aligned}$$

On peut aussi voir que:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{j!}) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{jt^{j-1}A^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}A^j}{(j-1)!} = A\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}A^{j-1}}{(j-1)!} = A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{(j)!} = Ae^{At}.$$

Exercice 7. Montrer Lemme 5.12 dans la polycopié:
Pour $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si $A \cdot B = B \cdot A$ on a $e^{A+B} = e^Ae^B$.

Solution.

$$\begin{aligned}e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{k!m!}A^kB^m = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}B^m = e^Ae^B.\end{aligned}$$

Exercice 8. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $f(x) = x^TAx$ la forme quadratique correspondante à A. Soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$ on a

$$\max_{\substack{x\in S^{n-1} \\ x\perp u_1,\dots,x\perp u_\ell}} f(x) = \lambda_{\ell+1} \tag{2}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.

Solution.