Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 12

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Soit $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire associée à cette matrice A. Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ qui satisfont les conditions du Lemme 5.20, c-à-d $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i \colon V_i \to V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Exercice 2. Compléter la preuve du théorème 5.22: Montrer que les orbites de

$$x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_\ell$$

engendrent encore V. (Où les x_i et y sont les mêmes que dans le démonstration du théorème 5.22).

Exercice 3. Soit $T \colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, \dots, V_k$ une décomposition de V tel que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente. Montrez que :

a) $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$.

b) Les $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres (pas forcément distinctes) de T. (*Indice* : Prendre $v_i \in V_i$ bien choisi).

c) Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)^{a_i}$ annule T. (*Indice* : Montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point).

d) En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (*Indice* : Si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propre λ, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f, λ, et v).

e) En déduire que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T.

Exercice 4. Vrai ou faux:

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2.

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Exercice 5. Donner la forme normale de Jordan J pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit J un bloc Jordan de taille $k \times k$ avec λ sur la diagonale. Montrer que

a) Le polynôme caractéristique de J est $p_J(t) = (\lambda - t)^k$.

b) J possède λ comme seule valeur propre.

c) Le polynôme minimal de J est $m_J(t) = (\lambda - t)^k$.

d) La multiplicité géométrique de λ est 1.

Exercice 7. Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \mathrm{span}\{(1,1,1)^T\}$.

i) Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

ii) Montrer q'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a pas nécessairement $W \oplus W^\perp = V$.

Exercice 8. (*) On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.