EPFL - Printemps 2022	Prof. Z. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 12	le 23 Mai 2022

Veuillez rendre l'exercice bonus jusqu'au dimanche, 5 juin, 18 h.

Exercice 1.
Soit K un corps de caractéristique 2 et soit $K \subseteq L$ une extension de degré 2.

(a) Supposons que pour tous $\alpha \in L\backslash K$ nous avons que $\alpha^2 \in K$. Montrer que:

  (i) $L = K(\alpha)$, où $\alpha \in L\backslash K$.

  (ii) tout $\alpha \in L\backslash K$ est inséparable.

(b) Supposons qu'il existe $\alpha \in L\backslash K$ tel que $\alpha^2 \notin K$. Montrer que:

  (i) $L = K(\beta)$, où $\beta \in L\backslash K$ est tel que $m_{\beta,K}(x) = x^2 + x + c \in K[x]$.

  (ii) $\tau : K(\beta) \to K(\beta)$ donné par $\tau|_K = \mathrm{Id}_K$ et $\tau(\beta) = \beta + 1$ est un automorphisme de $K(\beta)$.

  (iii) tout $\alpha \in L\backslash K$ est séparable.

Exercice 2.
Soit K un corps de caractéristique $p > 0$.

(a) Pour tout $\alpha \in K^p$ montrer qu'il existe un unique $\beta \in K$ tel que $\beta^p = \alpha$.

(b) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(K^p)$. Montrer qu'il existe un unique $\psi \in \mathrm{Aut}(K)$ tel que ψ est une extension de ϕ.

Exercice 3.

(a) Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et soit $\alpha \in K\backslash K^p$. Montrer que $x^p - \alpha \in K[x]$ est irréductible.

Soit $L = (\mathbb{F}_p(x))[y]/(y^2 - x(x-1)(x+1))$.

(b) Montrer que L est un corps.

(c) Si $p \neq 2$, montrer que L n'est pas parfait.

(d) Si $p = 2$, montrer que L n'est pas parfait.

Exercice 4.
1. Soit $\mathbb{Q} \subset K$ une extension. Montrez que tout automorphisme de K est l'identité sur $\mathbb{Q}$.
2. Décrivez le groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ dans les cas suivants: $K = \mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{7}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\omega^2)$ où $\omega = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 5.
Considérons l'extension $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_{2^n}$. D'après l'exemple 4.6.4 (6), $|\ \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{2^n}/\mathbb{F}_2)\ | = n$, et $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{2^n}/\mathbb{F}_2) = \langle F \rangle$, où F est l'automorphisme Frobenius,

$$F : \mathbb{F}_{2^n} \ni \alpha \mapsto \alpha^2 \in \mathbb{F}_{2^n}.$$

1. Soit $n = 2$, et considérons l'extension $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\alpha)$, où α est une racine de $x^2 + x + 1$. Donnez la matrice de l'automorphisme Frobenius dans la base $\{1, \alpha\}$ en tant que $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel. Quels sont les valeurs et leurs espaces propres? Peut on diagonaliser la matrice?

2. Soit $n = 3$, et considérons l'extension $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2(\beta)$, où β est une racine de $x^3 + x + 1$. Donnez la matrice de l'automorphisme Frobenius dans la base $\{1, \beta, \beta^2\}$ en tant que $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel. Quels sont les valeurs et leurs espaces propres? Peut on diagonaliser la matrice sur $\mathbb{F}_2$? Sur $\mathbb{F}_4$?

Exercice 6.
Dans les cas suivantes, calculez $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q})$, et calculez le pôlynome minimal de $\alpha, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ et α^{-1}.

1. $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{7}$
2. $\alpha = e^{(i\pi/3)}, \beta = -1$
3. $\alpha = e^{(i\pi/3)}, \beta = i$
4. $\alpha = e^{(i\pi/6)}, \beta = i.$

Bonus exercise

Exercice 7.
Let $f = x^3 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ such that $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ and $b = 1$.

1. Show that f is irreducible over $\mathbb{Q}$.

2. Show that f does not have 3 real roots in its splitting field (the splitting field (corps de décomposition) is isomorphic to the subfield of $\mathbb{C}$ generated by the complex roots of f, and hence it makes sense to talk about its element being real).

3. Let $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$. Show that K is a degree 3 extension of $\mathbb{Q}$, which is not Galois.

4. Let L be the decomposition field of f over $\mathbb{Q}$. Show that $\mathrm{Gal}(L/Q) \cong S_3$