Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 11 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) (+) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = 0$.

d) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Solution.

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ *où* $x, y \in \mathbb{C}$. *Pour chaque nombre entier* $k \geq 0$, *on a* $(tA)^k = \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix}$. *Donc, on peut calculer* e^{tA} *comme*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ty)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tx} & 0 \\ 0 & e^{ty} \end{pmatrix}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. *D'abord, on écrit* $A = PDP^{-1}$ *où* D *est une matrice diagonale, et ensuite on réécrit* e^{tA} *comme* $Pe^{tD}P^{-1}$. *Les valeurs propres de* A *sont* $\lambda_1 = 4$ *et* $\lambda_2 = 3$, *et* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *sont les vecteurs propres correspondants. On met* $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. *Alors* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $A = PDP^{-1}$, *où* $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *On obtient*

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} & e^{4t} - e^{t3} \\ 2e^{3t} - 2e^{4t} & 2e^{3t} - e^{4t} \end{pmatrix}.$$

c) *Si* $A^2 = 0$ *alors* $(tA)^k = 0$ *pour tout nombre entier* $k \geq 2$, *donc* $e^{tA} = \frac{1}{0!}I + \frac{1}{1!}At = I + tA$.

d) *Si* $A^2 = A$ *alors* $(tA)^k = t^k A$ *pour tout nombre entier* $k \geq 1$, *donc*

$$e^{tA} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A = I + (e^t - 1)A.$$

Exercice 2. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.

Solution. *Par définition,*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Or, comme $PP^{-1} = I$, *on a*

$$A^k = (P^{-1}BP)^k = \underbrace{P^{-1}BPP^{-1}BP \cdots P^{-1}BP}_{k \text{ fois}} = P^{-1}B^k P,$$

donc

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}B^k P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) P = P^{-1}e^B P$$

où on peut échanger l'ordre de multiplication et d'addition car la somme converge.

Exercice 3. On considère le système

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \\
\frac{d}{dt}x_2(t) &= -2x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned}$$

avec les conditions initiales: $x_1(0) = \alpha$ et $x_2(0) = \beta$.

a) Écrire le système en notation de vecteur matrice comme $x' = Ax$ et $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A,

c) Trouver la matrice S telle que $e^{tA} = Se^{t\Lambda}S^{-1}$, où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

d) Résoudre l'equation $x(t) = e^{tA}x(0)$ pour trouver une solution du système orignal.

Solution.

a) La matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_2 = 3$

c) Les vecteurs propres sont $v_1 = (1,1)^\top$ *et* $v_2 = (-1,1)^\top$*, alors*

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) On trouve

$$e^{tA} = Se^{t\Lambda}S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$$

Alors la solution du système orignal est

$$e^{tA}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t})\alpha & (\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{3t})\beta \\ (\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{3t})\alpha & (\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t})\beta \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

a) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA}, où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

b) Trouver la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 5x_2 \\ x_2' &= -5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = -1$.

Solution.

a) L'équation caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - a)^2 + b^2 = (\lambda - a - ib)(\lambda - a + ib),$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = a - ib$ *et* $\lambda_2 = a + ib$*, et* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ *sont les vecteurs propres correspondants. Donc* $P^{-1}AP = D$*, où* $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} a - bi & 0 \\ 0 & a + bi \end{pmatrix}$*, et on a*

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(a-ib)t} & 0 \\ 0 & e^{(a+ib)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{at}(e^{-ibt} + e^{ibt}) & \frac{i}{2}e^{at}(e^{-ibt} - e^{ibt}) \\ \frac{i}{2}e^{at}(-e^{-ibt} + e^{ibt}) & \frac{1}{2}e^{at}(e^{-ibt} + e^{ibt}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Ici, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$*, alors par la partie a), on a que* $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos(5t) & e^{2t}\sin(5t) \\ -e^{2t}\sin(5t) & e^{2t}\cos(5t) \end{pmatrix}$.
Ainsi la solution au système d'équations est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(5t) + \sin(5t)) \\ e^{2t}(-\sin(5t) + \cos(5t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Pour les conditions initiales $x_1(0) = 2$ *et* $x_2(0) = -1$*, on obtient*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t}(2\cos(5t) - \sin(5t)) \\ x_2(t) &= e^{2t}(-\cos(5t) - 2\sin(5t)). \end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Résoudre l'equation $x' = Ax$ avec conditions initiales $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solution. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*. On a l'équation* $x' = Ax$ *avec conditions initiales* $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*. La solution du système est*

$$e^{At}x(0)$$

Alors, il faut trouver e^{tA}*. Soit* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. On peut écrire*

$$A = 2I_2 + B$$

Comme les deux matrices $2I_2$ *et* B *sont commutatives, on peut utiliser* $e^A = e^{2I_2}e^B$*.*
Maintenant, on voit que $B^2 = 0$ *alors* $e^{tB} = I + tB$ *et on trouve que*

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

et la solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à cette matrice A. Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ qui satisfont les conditions du Lemme 5.20, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i \colon V_i \to V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Solution. *On va suivre la démonstration du Lemme 5.20 pour trouver ces sous-espaces. On cherche d'abord les valeur propres de la matrice* A*. On voit que* $p_A(x) = (x+2)^2(x-2)$*. On calcule alors les espaces des vecteurs propres pour* -2 *et pour* 2*. On a que* $\ker(A-2I) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$ *et* $\ker(A+2I) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\}$*. On remarquant que* $\dim(\ker(A+2I)) = 1 < m_a(-2) = 2$ *on voit que la matrice* A *n'est pas diagonalisable. On calcule alors* $\ker((A+2I)^2) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$*.*

On va maintenant voir que $V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ *et* $V_2 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$ *sont des sous-espaces qui satisfont toutes les conditions du Lemme 5.20.*

$T(V_2) \subseteq V_2$ *est facile à voir, vu que* V_2 *est engendré par un vecteur propre. Pour voir que* $T(V_1) \subseteq V_1$ *on prend un vecteur* $v = \begin{pmatrix}a\\-a\\-a+b\end{pmatrix} \in V_1$*, pour* $a, b \in \mathbb{R}$ *et on regarde l'image* $T(v)$*.* $T(v) = \begin{pmatrix}-2a+b\\2a-b\\2a-3b\end{pmatrix}$ *qui est clairement encore un vecteur de* V_1 *car il peut être écrit comme* $(-2a+b)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - 2b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$*.*

Encore une fois, vu que V_2 *est composé d'un vecteur propre, il est facile de voir que* $T_{|V_2} = N_2 + 2I$*, où* $N_2 = 0$*.*

Pour V_1 *on peut voir que* $T_{|V_1} = (T+2I)_{|V_1} - (2I)_{|V_1}$*. Maintenant on veut voir que* $N_1 = (T+2I)_{|V_1}$ *est nilpotente. On peut utilise la définition de* V_1*: en fait, comme* $V_1 = \ker((A+2I)^2)$ *on sait que* $(N_1)^2_{|V_1} = 0$*. On peut aussi vérifier cette condition directement:*

$$(A+2I)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\16 & 16 & 0\\-16 & -16 & 0\end{pmatrix}, \Rightarrow (A+2I)^2\begin{pmatrix}-a\\a\\a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Il reste finalement à voir que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$*. Pour cela, il suffit de montrer que les vecteurs sont indépendants, ce qu'on peut faire facilement en vérifiant que* $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix} \neq 0$ *et que* $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ *en résolvant le système*

$$\begin{pmatrix}a\\-a\\-a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\c\\-c\end{pmatrix},$$

dont la seule solution possible est $a = b = c = 0$*.*

Exercice 7. (*)

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient J une forme normale de Jordan de A, P la matrice de passage associée ($A = PJP^{-1}$).

Le but de cet exercice est de montrer que le nombre de blocs de Jordan sur J associé à une valeur propre λ est exactement $\dim\ker(A - \lambda I)$.

a) Soit $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$ une matrice blocs diagonale. Montrer que

$$\mathrm{rang}(S) = \mathrm{rang}(S_1) + \mathrm{rang}(S_2)$$

Généraliser pour p blocs sur la diagonale. (*Indice* : Considérer les lignes linéairement indépendantes de S_1, S_2).

b) Soit $B = U + \lambda I \in \mathbb{C}^{q\times q}$ un bloc de Jordan, où U est l'application de décalage. Montrez que la seule valeur propre de B est λ et que l'espace propre associé est engendré par e_1. Déduisez $\dim \mathrm{Im}(B - \lambda I) = q - 1$.

c) Soient $B_1, \ldots, B_k$ l'ensemble des blocs de Jordan sur J associé à une valeur propre λ. Déduire de a) et b) que $\dim \mathrm{Im}(J - \lambda I) = n - k$. En déduire que $\dim\ker(A - \lambda I) = k$.

Solution.