Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 13

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer qu'il existe un polynôme $m_A(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ de degré minimal et dont le coefficient du monôme dominant est 1 tel que $m_A(A) = 0$. De plus, montrer que $m_A(x)$ est unique. Le polynôme $m_A(x)$ est appelé le *polynôme minimal de A*.

Exercice 2. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire.

i) Montrer que U^{-1} est aussi unimodulaire.

ii) Montrer que $\mathbb{Z}^n = \{Uz \mid z \in \mathbb{Z}^n\}$, c'est-à-dire que U est un automorphisme sur $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 3. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire. Montrer qu'il existe un $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et des matrices E_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ tels que

i) chaque E_i représente une opération élémentaire unimodulaire (cf. définition 6.4),

ii) on a $U = E_1 \cdot E_2 \cdots E_m$.

Exercice 4. Montrer que le système $Ax = 0$ a une solution $0 \neq z^\star \in \mathbb{Z}^n$ pour chaque matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ avec $m < n$.

Exercice 5. Trouver toutes les solutions entières de

$$Ax = b_1, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

et de

$$Bx = b_2, \text{ où } B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -10 \\ -6 & 15 & 12 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Exercice 6. Montrer que d dans le lemme 6.6 est le gcd de la première ligne de A. En d'autres mots, montrer le lemme suivant.

Lemme. Soit $A \in Z^{m\times n}$ une matrice en nombres entiers de plein ligne rang, alors il existe une matrice unimodulaire $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, tel que la première ligne de AU est de la forme $(d, 0, \dots, 0)$ où $d = \gcd(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$.

Exercice 7. (*) Soit $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ un matrice symétrique, unimodulaire, et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unimodulaire U telle que $G = U^\intercal U$.

Indication: Regarder ac. Si $ac \geq 2$, est-ce qu'il y a une matrice unimodulaire U t.q. $U^\intercal G U = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ avec $0 \leq b' < b$?