Exercice 11.1. (a) Rappeler la définition de la notion d'*action de groupe* sur un ensemble.

(b) Supposons que le groupe Γ agit sur l'ensemble X, rappeler les notions d'*orbite* et de *stabilisateur* d'un élément $x \in X$.

(c) que veut-on dire lorsqu'on dit que Γ agit *librement* sur X ?

(d) Comment définit-on le quotient X/Γ.

(e) Montrer qu'il y a une bijection canonique entre le quotient X/Γ et l'ensemble des orbites de X pour l'action de Γ.

(f) Qu'est-ce qu'une action *transitive* ? Combien y a-t-il d'orbites lorsque l'action est transitive ?

(g) Montrer que si Γ agit transitivement sur X, alors il y a une bijection canonique entre X et Γ/Γ_x, où on a noté Γ_x le stabilisateur de x.

Exercice 11.2. Soit X un espace topologique localement compact et Γ un groupe qui agit par homéomorphismes sur X. On dit que l'action est *proprement discontinue* si pour tout compact $Q \subset X$ on a

$$\mathrm{Card}\left(\{\gamma \in \Gamma \mid Q \cap \gamma Q \neq \emptyset\}\right) < \infty.$$

(a) Donner un exemple d'action proprement discontinue d'un groupe infini Γ, puis donner un contre-exemple.

(b) Démontrer que si Γ agit librement et de façon proprement discontinue sur l'espace topologique X et si on note $Y = X/\Gamma$, alors la projection canonique $\pi : X \to Y$ est un revêtement.

(c) Montrer que si M est une variété différentiables et si Γ agit librement et de façon proprement discontinue sur M par difféomorphismes, alors le quotient $N = M/\Gamma$ admet une structure naturelle de variété différentiable et la projection canonique $\pi : M \to N$ est un difféomorphisme local.

(d) Montrer avec un exemple que le point précédent est faux si on ne suppose pas que l'action est libre.

Exercice 11.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne est Γ un groupe agissant par isométries sur M (i.e. pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $x \mapsto \gamma \cdot x$ est une isométrie de (M, g)). Supposons que l'action de Γ est libre et proprement discontinue, montrer alors que l'on peut construire une unique métrique riemannienne g' sur la variété $N = M/\Gamma$ pour laquelle la projection canonique $\pi : M \to N$ est une isométrie locale.

Montrer ensuite que (N, g') est complète si et seulement si (M, g) est complète.