EPFL - Printemps 2022	M. Troyanov
Géométrie Riemannienne I	**Corrigé**
Corrigé 8	3 Mai 2022

8.1. La quantité $\mathrm{Ric}(x,y)$ est par définition la trace de l'endomorphisme

$$v \mapsto R(x,v)y.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ric}(x,y) = \sum_i R(e_i,x,y,e_i) = \sum_i R(e_i,y,x,e_i) = \mathrm{Ric}(y,x).$$

(On a noté de la même manière le tenseur de courbure $(0,4)$ et $(1,3)$).

8.2. La réponse est que $K' = 1/a^2K$.

Explication. Notons tout d'abord que la connexion de Levi-Civita de g et de g' sont les mêmes (ce qu'on montre ou bien en vérifiant que celle de g vérifie toutes les axiomes de celle de g', ou bien en écrivant la formule qui donne les symboles de Christoffel).

On a donc pour tout point $p \in M$ et $X, Y \in T_pM$ linéairement indépendants :

$$K'(X,Y) = \frac{g'(R(X,Y)Y,X)}{g'(X,X)g'(Y,Y) - g'(X,Y)^2} = \frac{a^2 g(R(X,Y)Y,X)}{a^4\left(g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2\right)} = \frac{1}{a^2}K(X,Y).$$

Par exemple la courbure sectionnelle d'une sphère de rayon r est constante, égale à $1/r^2$.

8.3. (a) On cherche à calculer

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \left\langle \nabla_r\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} - \nabla_\theta\nabla_r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle$$

avec le moins de calculs possibles (attention : par convention cette expression est l'opposée de la courbure). Montrons d'abord que $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}$.
Pour celà on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial r}f(r,\theta)^2 = 2f(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta).$$

Mais d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_r\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle$$

et aussi

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\langle \frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle.$$

On en déduit que $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}$ n'a qu'une composante selon $\frac{\partial}{\partial \theta}$ (disons $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} = \alpha(r,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$) et que

$$\left\langle \alpha\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = f(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$$

On en déduit α puis finalement

$$\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(= \nabla_r\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Pour la suite, on sait déjà que

$$\nabla_r \frac{\partial}{\partial r} = 0$$

car les courbes θ =constante sont géodésiques.

Vu l'expression de la courbure que l'on cherche à calculer, il n'y a pas besoin d'expliciter $\nabla_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$.

On a maintenant tout ce qu'il faut pour calculer la courbure (à partir de maintenant seules les dérivées partielles de f par rapport à r sont utilisées; on les notes pour simplifier f') :

$$\nabla_r \nabla_\theta \frac{\partial}{\partial r} - \nabla_\theta \nabla_r \frac{\partial}{\partial r} = \nabla_r \nabla_\theta \frac{\partial}{\partial r} = \frac{f''f - (f')^2}{f^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{f'}{f} \nabla_r \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{f''}{f} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Ainsi

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = f''f$$

Pour avoir la courbure sectionnelle, il faut encore diviser par la norme au carré de $\frac{\partial}{\partial \theta}$ (et prendre l'opposé). On trouve alors

$$-K = \frac{f''}{f},$$

ce qu'on voulait.

(b) Cela provient de la proposition 3.8.1

(c) On trouve -1 avec $f = \sinh$.

(d) Si $K = 0$, l'équation en f se résout en $f(r, \theta) = r$. Si $K = 1$, on trouve $f(r, \theta) = \sin r$. Si $K = -1$, on retrouve le cas hyperbolique.

(e) Les points précédents montrent que le tenseur métrique d'une surface en coordonnées polaire est déterminée par sa courbure, car la fonction f vérifie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + Kf = 0, \qquad \text{avec conditions initiales} \qquad f(0, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial r}(0, \theta) = 1.$$

On ne peut en général pas étendre l'isométrie en une isométrie globale, par exemple un cylindre (circulaire droit dans $\mathbb{R}^3$) est de courbure nulle mais n'est pas globalement homéomorphe au plan.

8.4. On sait déjà que la courbure sectionnelle de la sphère est constante. Pour connaître la valeur de cette constante, il suffit de raisonner en dimension 2 puisque, étant données deux vecteurs tangents en un point $p \in S^n$ (linéairement indépendants), ils sont tangents à une sous-sphère S^2. On peut alors utiliser l'exercice précédant qui donne la valeur de la courbure d'une métrique en coordonnée polaires. On obtient $K = 1$.

Pour trouver maintenant la courbure de Ricci, fixons un point p de la sphère et un vecteur x en p, de norme 1. On peut compléter la base (x) en une base orthonormée $(x, e_2, \cdots, e_n)$ de $T_p\mathcal{S}^n$. Alors,

$$\mathrm{Ric}(x, x) = \sum_{i=2}^{n} R(x, e_i, x, e_i) = \sum_i K(x, e_i) = n - 1.$$

Enfin, la courbure scalaire est la trace de la forme quadratique Ric, elle vaut donc

$$\mathrm{S} = n(n-1).$$

8.5. On définit un (0,4)-tenseur A par la formule :

$$A(X,Y,Z,W) := R(X,Y,Z,W) - K \cdot (g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)),$$

où K est la courbure sectionnelle de (M,g) que l'on suppose constante. Pour résoudre l'exercice il suffit de montrer que ce tenseur est identiquement nul.

On vérifie d'abord qu'il vérifie les même quatre propriétés de symétries que le (0,4)-tenseur de courbure.

On observe ensuite que pour tous champs de vecteurs X, Y, on a

$$A(X,Y,Y,X) = 0,$$

ceci est essentiellement la définition de la courbure sectionnelle. On a donc aussi

$$\begin{aligned} 0 = A(X+Z,Y,Y,X+Z) &= A(X,Y,Y,X) + A(Z,Y,Y,X) + A(X,Y,Y,Z) + A(Z,Y,Y,Z) \\ &= A(Z,Y,Y,X) + A(X,Y,Y,Z), \end{aligned}$$

donc $A(Z,Y,Y,X) = -A(X,Y,Y,Z)$. Mais d'autre part

$$A(Z,Y,Y,X) = A(Y,X,Z,Y) = -A(X,Y,Z,Y) = +A(X,Y,Y,Z)$$

(on utilise les symétries de A). Cela montre que $A(Z,Y,Y,X) = 0$ pour tous X, Y, Z. Mais alors

$$\begin{aligned} 0 = A(Z,Y+W,Y+W,X) &= A(Z,Y,Y,X) + A(Z,Y,W,X) + A(Z,W,Y,X) + A(Z,W,W,X) \\ &= A(Z,Y,W,X) + A(Z,W,Y,X), \end{aligned}$$

et donc

$$A(Z,Y,W,X) = -A(Z,W,Y,X).$$

On peut écrire cette relation ainsi :

$$A(Z,Y,W,X) = A(W,Z,Y,X),$$

et elle implique que

$$A(W,Z,Y,X) = A(W,Z,Y,X).$$

En utilisant maintenant l'identité de Bianchi on a

$$0 = A(Z,Y,W,X) + A(Y,W,Z,X) + A(W,Z,Y,X) = 3A(Z,Y,W,X).$$