Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 12 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Soit $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire associée à cette matrice A. Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ qui satisfont les conditions du Lemme 5.20, c-à-d $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i \colon V_i \to V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Solution. *Le polynôme caractéristique de A est donné par $p_A(x) = (x-3)^2(x+1)^2$. Alors on pose $V_1 = \ker((A-3I_4)^2)$ et $V_2 = \ker((A+I_4)^2)$. On trouve en échelonnant:*

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \},$$

et

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

En suivant la démonstration du Lemme 5.20, on peut, de manière similaire à l'exercice 6 de la série 11, vérifier que ces sous-espaces satisfont les propriétés requises.

Exercice 2. Compléter la preuve du théorème 5.22: Montrer que les orbites de

$$x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_\ell$$

engendrent encore V. (Où les x_i et y sont les mêmes que dans le démonstration du théorème 5.22).

Solution. *Rappelons que*

$$x_i = \frac{1}{\gamma_i} y - \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in J, j \neq i} \gamma_j N^{m_j - 1 - m} x_j.$$

Ainsi, pour tout élément $N^k x_i$ de l'orbite de x_i, on a

$$N^k x_i = \frac{1}{\gamma_i} N^k y - \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in J, j \neq i} \gamma_j N^{m_j - 1 - (m-k)} x_j.$$

Ceci implique que tout élément qui est une combinaison linéaire des éléments des orbites de $x_1, \ldots, x_l$ peut être écrit comme combinaison linéaire des éléments des orbites de

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_l.$$

Exercice 3. Soit $T\colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, ..., V_k$ une décomposition de V tel que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente. Montrez que :

a) $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$.

b) Les $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres (pas forcément distinctes) de T. (*Indice* : Prendre $v_i \in V_i$ bien choisi).

c) Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{a_i}$ annule T. (*Indice* : Montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point).

d) En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (*Indice* : Si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propre λ, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f, λ, et v).

e) En déduire que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T.

Solution.

a) *Pour un i fixé, soit $v \in V_i$ et a_i le plus petit entier tel que $N_i^{a_i} = 0$. Comme $T_{|V_i}(u) = T(u)$ $\forall u \in V_i$ et $T(V_i) \subseteq V_i$, on a*

$$\begin{aligned}(T - \lambda_i I)^{a_i}(v) &= (T_{|V_i} - \lambda_i I)^{a_i}(v) \\ &= (N_i + \lambda_i I - \lambda_i I)^{a_i}(v) \\ &= N_i^{a_i}(v) \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) *Soit a_i le plus petit entier tel que $N_i^{a_i} = 0$. Alors*

$$\{0\} \neq N_i^{a_i-1}(V_i) = (T - \lambda_i I)^{a_i-1}(V_i)$$

et donc on peut choisir un vecteur $0 \neq v \in (T - \lambda_i I)^{a_i-1}(V_i) \subseteq V_i$. Pour ce vecteur, on a

$$(T - \lambda_i I)(v) \in (T - \lambda_i I)^{a_i}(V_i) = \{0\}$$

car $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ par le point a). Ainsi, v est un vecteur propre de valeur propre λ_i.

c) *Soit $v \in V$. On peut écrire $v = \sum_{i=1}^k v_i$ avec $v_i \in V_i$. Remarquons que $(T - \lambda_i I)^{a_i}(v_j) \in V_j$ pour tout $v_j \in V_j$ (car T et I envoient V_j dans V_j), et donc en appliquant les termes $(T - \lambda_j I)^{a_j}$ l'un après l'autre, on obtient*

$$\begin{aligned}
f(T)(v) &= \left(\prod_{i=1}^{k}(T - \lambda_i I)^{a_i}\right)(v) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}(T - \lambda_i I)^{a_i}\right)(v_1 + \cdots + v_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(T - \lambda_i I)^{a_i}\right)((T - \lambda_k I)^{a_k}(v_1 + \ldots v_k)) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(T - \lambda_i I)^{a_i}\right)\left(\underbrace{(T - \lambda_k I)^{a_k}(v_1)}_{=:v_1' \in V_1} + \cdots + \underbrace{(T - \lambda_k I)^{a_k}(v_k)}_{=0}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}(T - \lambda_i I)^{a_i}\right)(v_1' + \cdots + v_{k-1}') \\
&\vdots \\
&= 0.
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $V_i \subseteq \ker(T - \lambda_i)^{a_i}$ par la partie a).

d) *Si $v \in V$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, remarquons que pour tout i, on a*

$$\begin{aligned}
& & (T - \lambda_i I)(v) &= \underbrace{(\lambda - \lambda_i)}_{\neq 0} v \\
&\Rightarrow & (T - \lambda_i I)^{a_i}(v) &= (\lambda - \lambda_i)^{a_i} v \\
&\Rightarrow & \left(\prod_{i=1}^{k}(T - \lambda_i I)^{a_i}\right)(v) &= \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{a_i} v \\
& & &\neq 0.
\end{aligned}$$

e) *On a montré que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T (partie d)), et que chaque λ_i est une valeur propre. Si J est une forme normale de Jordan quelconque de T, on peut trouver une décomposition de T comme dans l'énoncé du lemme 5.20 de sorte que les λ_i sont précisément les éléments diagonaux de J.*

Exercice 4. Vrai ou faux:

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2.

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Solution.

a) *Faux. Soit J une matrice en forme de Jordan. On a que J^2 n'est pas nécessairement une matrice en forme de Jordan. Par exemple si*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on voit clairement que J^2 n'est pas en forme de Jordan.

b) *Faux. La multiplication n'est pas commutative. Par exemple on peut considérer*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

AB et BA sont deux matrices en forme de Jordan différentes.

Exercice 5. Donner la forme normale de Jordan J pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution. *On commence par trouver les valeurs propres de A. On a que le polynôme caractéristique de A est*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

donc la forme normale de Jordan de A est

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ou \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La multiplicité géométrique de $\lambda = 2$ est 1, donc A n'est pas diagonalisable et la forme normale de Jordan J est $J = J_2$.

Exercice 6. Soit J un bloc Jordan de taille $k \times k$ avec λ sur la diagonale. Montrer que

a) Le polynôme caractéristique de J est $p_J(t) = (\lambda - t)^k$.

b) J possède λ comme seule valeur propre.

c) Le polynôme minimal de J est $m_J(t) = (\lambda - t)^k$.

d) La multiplicité géométrique de λ est 1.

Solution.

a) *Le polynôme caractéristique de J est $p_J(x) = det(J - xI) = (\lambda - x)^k$.*

b) *Comme $p_J(x) = (\lambda - x)^k$, λ est la seule valeur propre de J, et sa multiplicité algébrique est k.*

c) *Par le Théorème d'Hamilton-Cayley, $p_J(J) = 0$. Le polynôme $m_J(J)$ est le polynôme unitaire de degré minimal parmi ceux qui annulent J, c-à-d $q(J) = 0$. Par le Théorème 4.18 (point 2)), $m_J(J)$ doit diviser $p_J(J)$ et donc $m_J(x) = (\lambda - x)^m$ où $0 \leq m \leq k$. Comme $(J - \lambda I)^{k-1}$ est une matrice non-nulle (vérifier que $((J - \lambda I)^{k-1})_{1,k} = 1$), on a $m > k - 1$, donc forcément $m = k$ et $m_J(x) = p_J(x) = (\lambda - x)^k$.*

d) *Un vecteur propre de J satisfait*

$$0 = (J - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc les vecteurs propres de J sont précisément les vecteurs $\{te_1 : t \in \mathbb{C}\}$. La multiplicité géométrique de λ est donc 1.

Exercice 7. Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \text{span}\{(1,1,1)^T\}$.

i) Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

ii) Montrer q'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a pas nécessairement $W \oplus W^\perp = V$.

Solution. *i*) $W = \{(0,0,0)^T, (1,1,1)^T, (2,2,2)^T\}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 3ab \equiv 0 \mod 3,$$

alors $\langle w, w' \rangle = 0$ pour tout $w, w' \in W$, $W \subseteq W^\perp$.

ii) Observons que

$$W^{\perp} = \left\{ v \in \mathbb{F}_3^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3 \right\},$$

car $\langle (a,a,a)^T, (v_1, v_2, v_3) \rangle = a(v_1 + v_2 + v_3)$ *et donc* $v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3$ *pour* $a \neq 0$. *Ainsi* $(1,1,0)^T \notin W^{\perp} = W + W^{\perp}$ *d'après la partie i).*

Exercice 8. (*) On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Solution.