Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 14

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ une matrice de rang ligne plein, et $n > m$. Montrer qu'il existe $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}^n$ linéairements indépendants sur $\mathbb{R}$ tels que $\ker_{\mathbb{Z}}(A) = \{\sum_{i=1}^k x_i b_i | x_i \in \mathbb{Z}\}$. Le noyau $\ker_{\mathbb{Z}}$ est défini par $\{x \in \mathbb{Z}^n | Ax = 0\}$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $d \in \mathbb{Z}$ un nombre entier qui divise chaque composante de A. Montrer que si $U \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ sont des matrices unimodulaires, alors d divise chaque composante de $U \cdot A \cdot V$.

Exercice 3. Calculer la forme normale de Smith pour

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 21 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 15 & 0 & 10 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $rang(A) = m$. L'ensemble $\Lambda(A) := \{Ax, x \in \mathbb{Z}^n\}$ est un réseau entier généré par A. Parmi les matrices suivantes, lesquelles génèrent le même réseau?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Calculer la forme normale de Jordan de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $1, 2, -3$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ un bloc Jordan avec λ sur la diagonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Montrer que

$$(e^{At}x)_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

Exercice 7. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $Q(x) = x^T A x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D [x]_{B'}$, où D est une matrice diagonale.

Exercice 8. Soit $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ telle que $B = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\det(B) \neq 0$. Soit $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{n} ||b_i||}{\det(B)}$. Si $v = Bx$, $x \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ est un vecteur le plus court de $\Lambda(B)$, alors $||x||_\infty \leq \alpha$.