Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 14 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ une matrice de rang ligne plein, et $n > m$. Montrer qu'il existe $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}^n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ tels que $\ker_{\mathbb{Z}}(A) = \{\sum_{i=1}^k x_i b_i | x_i \in \mathbb{Z}\}$. Le noyau $\ker_{\mathbb{Z}}$ est défini par $\{x \in \mathbb{Z}^n | Ax = 0\}$.

Solution. *Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ unimodulaire telle que $AU = [H|0]$ est en forme normale d'Hermite.*

$$\begin{aligned} & & Ax = 0 \\ \Leftrightarrow & & AU\underbrace{(U^{-1}x)}_{=:z} = 0 \\ \Leftrightarrow & & [H|0]z = 0 \\ \Leftrightarrow & & \forall\, i \in \{1, \dots, m\} : z_i = 0. \end{aligned}$$

Donc, comme $x = Uz$, $\ker(A) = \operatorname{span}\{u_{m+1}, \dots, u_n\}$, où u_i est la i-ème colonne de U.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $d \in \mathbb{Z}$ un nombre entier qui divise chaque composante de A. Montrer que si $U \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ sont des matrices unimodulaires, alors d divise chaque composante de $U \cdot A \cdot V$.

Solution. *Si d divise toutes les composantes de A, alors le* gcd *de chaque ligne (resp. colonne) est un multiple de d. Comme les opérations unimodulaires ne change pas le* gcd *d'une ligne (resp. colonne), d va diviser le* gcd *de toutes les lignes (resp. colonnes) de UAV et donc chaque composante de UAV.*

Exercice 3. Calculer la forme normale de Smith pour

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 21 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 15 & 0 & 10 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution. *La forme normale d'Hermite de A est donnée par :*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On échange les lignes 1 et 3 de A_1. La forme normale d'Hermite de cette nouvelle matrice est donnée par :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On soustrait 9-fois la ligne 1 de A_2 à la ligne 3 de A_2. On obtient :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On échange les lignes 3 et 4 et les colonnes 3 et 4 de A_3. On obtient alors la forme normale de Smith :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

La forme normale d'Hermite de B est donnée par :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On ajoute la 3-ième ligne de B_1 à la première ligne de B_1. La forme normale d'Hermite de cette nouvelle matrice est donnée par :

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On soustrait 10-fois la ligne 1 de B_2 à la ligne 3 de B_2. On obtient :

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On échange les lignes 3 et 4 et les colonnes 3 et 4 de B_3. On obtient alors la forme normale de Smith :

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $rang(A) = m$. L'ensemble $\Lambda(A) := \{Ax, x \in \mathbb{Z}^n\}$ est un réseau entier généré par A. Parmi les matrices suivantes, lesquelles génèrent le même réseau?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution. *Pour quelques matrices unitaires U_1, U_2, U_3, on a*

$$A_1U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_3U_3, \qquad A_2U_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Comme la forme normale d'Hermite est unique, et une matrice unimodulaire est un automorphisme sur $\mathbb{Z}^n$, A_1 et A_2 génèrent le même réseau, mais A_3 génère un autre réseau.

Exercice 5. Calculer la forme normale de Jordan de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $1, 2, -3$.

Solution. *D'après l'exercice 2 de la série 4, le polynôme charactéristique de A est*

$$p_A(\lambda) = \lambda^8 + 2\lambda^7 - 17\lambda^6 - 16\lambda^5 + 115\lambda^4 - 22\lambda^3 - 279\lambda^2 + 324\lambda - 108.$$

Des divisions successives par $\lambda - 1$ donnent le produit $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda^5 + 5\lambda^4 - 5\lambda^3 - 45\lambda^2 + 108)$, et de nouvelles divisions par $\lambda + 3$ et $\lambda - 2$ donnent $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+3)^3(\lambda-2)^2$. Par conséquent, les valeurs $1, 2$, et -3 ont pour multiplicité algébrique $3, 2$ et 3 respectivement.

Pour connaître la décomposition de Jordan, il s'agit de calculer la multiplicité géométrique de chaque valeur. Or on remarque immédiatement que $rang(A - \lambda I) = 7$ pour $\lambda = 1, 2, -3$, et donc que les multiplicités géométriques sont toutes 1. La forme de Jordan est donc composée de trois blocs diagonaux, chacun associé à une des valeurs propres.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un bloc Jordan avec λ sur la diagonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Montrer que

$$(e^{At}x)_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

Solution. *On peut écrire $A = D + N$ où D est diagonale et N est nilpotente. Comme D et N commutent, on a que $e^{At} = e^{Dt}e^{Nt}$. Il est facile de voir que $e^{Dt} = e^{\lambda t}I$. Pout trouver e^{Nt}, on observe que*

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i+1 = j \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

donc on obtient que

$$(N^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i+k = j \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Dès lors,

$$e^{Nt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & 1 & t \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\left(e^{Nt}\right)_{ij} = \begin{cases} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} & si\ j \geq i \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Finalement, on obtient que $e^{At}x = e^{Dt}e^{Nt}x = e^{\lambda t}e^{Nt}x$, donc

$$\left(e^{At}x\right)_i = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{n} \left(e^{Nt}\right)_{ij} x_j = e^{\lambda t} \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!}.$$

Exercice 7. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $Q(x) = x^T Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D[x]_{B'}$, où D est une matrice diagonale.

Solution. *a) Le matrice A que l'on cherche est simplement*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

b) *On commence par calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. L'équation haractéristique de A est*

$$\begin{aligned} 0 &= det(A-\lambda I) = (9-\lambda)(7-\lambda)(11-\lambda) - 16(11-\lambda) - 16(7-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 207\lambda + 405 = -(\lambda-15)(\lambda-9)(\lambda-3) \end{aligned}$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 9$ *et* $\lambda_3 = 3$. *Le premier vecteur propre satisfait* $(A-\lambda_1 I)v_1 = 0$. *On trouve* $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et de la même façon,* $v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. *La matrice* $P_{B'B}$ *qui satisfait* $[x]_B = P_{B'B}[x]_{B'}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^3$ *est ainsi la matrice avec les colonnes* v_1, v_2 *et* v_3*:*

$$P_{B'B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^3$

$$Q(x) = [x]_B^T A[x]_B = (P_{B'B}[x]_{B'})^T A(P_{B'B}[x]_{B'}) = [x]_{B'}P_{B'B}^T AP_{B'B}[x]_{B'} = [x]_{B'}D[x]_{B'}.$$

où

$$D = (P_{B'B})^T AP_{B'B} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale.

Exercice 8. Soit $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ telle que $B = (b_1, \ldots, b_n)$ et det$(B) \neq 0$. Soit $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n \|b_i\|}{\det(B)}$. Si $v = Bx$, $x \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ est un vecteur le plus court de $\Lambda(B)$, alors $\|x\|_\infty \leq \alpha$.

Solution. *La règle de Cramer stipule que la solution du système* $Bx = v$ *vérifie* $x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$, *où* B_i *est la matrice carrée formée en remplaçant la i-ième colonne de B par v.*

L'inégalité de Hadamard conclut alors : $|x_i| \leq \frac{1}{\det(B)}\|v\| \prod_{j\neq i} \|b_j\|$. *Comme v est supposé court, on a forcément* $\|v\| \leq \|Be_i\| = \|b_i\|$, *et le résultat suit.*