Vade-mecum du produit vectoriel

Notation : $\vec{a} \wedge \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a} \times \vec{b}$

Orientation :

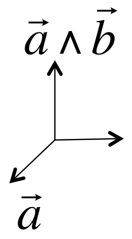
$$\vec{a} \perp \vec{a} \wedge \vec{b} \qquad \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{b} \qquad \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}\right)$$

Forment un trièdre *direct*

Module :

$$\left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| = \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires



$$\begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} y & v \\ z & w \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & u \\ z & w \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \text{"}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & x & u \\ \vec{e}_2 & y & v \\ \vec{e}_3 & z & w \end{vmatrix}\text{"}$$

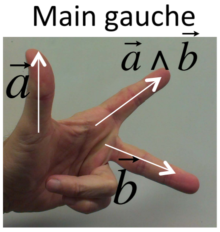
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yw - zv \\ zu - xw \\ xv - yu \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} z & w \\ x & u \\ y & v \end{matrix}$$

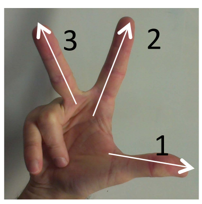
Vade-mecum du produit vectoriel

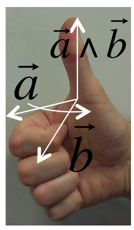
Pratiquement :

Main gauche

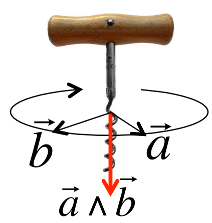


Main droite

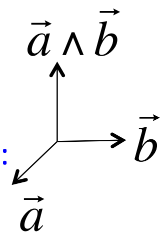




Tire-bouchon



Conseil : choisir une règle et s'y tenir. En cas de doute, toujours se rappeler que les vecteurs **a**,**b** et **axb** doivent former un trièdre direct :



Vade-mecum du produit vectoriel

Propriétés importantes :

Mathématique

$$\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\qquad\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

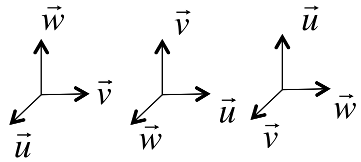
Antisymétrie : $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

Permutation circulaire pour un triplé de vecteurs orthonormés :

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$$

$$\vec{w}\times\vec{u}=\vec{v}\qquad\vec{v}\times\vec{w}=\vec{u}$$

Attention cette relation n'est pas vrai pour trois vecteurs quelconques



Ces trois trièdres sont directs

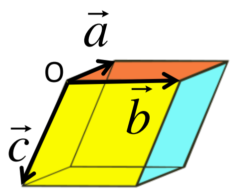
Déterminant : $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

Vade-mecum du produit vectoriel

Propriétés importantes :

Mathématique

Volume d'un rhomboèdre : $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=Vol(O,\vec{a},\vec{b},\vec{c})$



Autre identités remarquables :

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)+\vec{c}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)+\vec{b}\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)=\vec{0}$$

$$\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|^{2}+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^{2}=\left\|\vec{a}\right\|^{2}\left\|\vec{b}\right\|^{2}$$

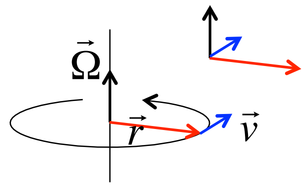
Vade-mecum du produit vectoriel

Propriétés importantes :

Physique — Le produit vectoriel est lié à la description de mouvements de rotation

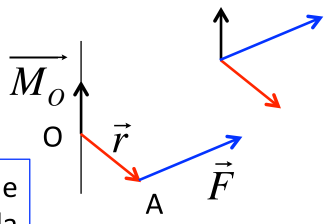
Vitesse et vecteur rotation :

$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ ou bien $\vec{\Omega} = \dfrac{\vec{r} \wedge \vec{v}}{r^2}$



Moment d'une force :

$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \wedge \vec{F}$



L'ordre est choisi de sorte que le moment de la force et le vecteur rotation induit par la force soient dans la *même* direction.

Attention : les forces et les moments *ne s'additionnent pas* (ces quantités n'ont pas les mêmes dimensions).

Vade-mecum du produit vectoriel

Propriétés importantes :

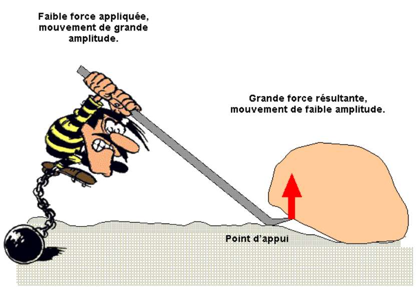
Physique

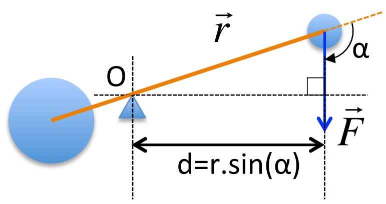
Moment d'une force :

Attention : un moment est *toujours* défini par rapport à un point de référence.

$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$

Ce n'est pas autre chose qu'une écriture sous forme de vecteurs du principe du bras de levier, ce qui permet de ramener à des sommes de vecteurs la description de mouvements de rotations.





$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{M_O} \cdot \overrightarrow{u_\perp} = rF\sin(\alpha) = \pm dF$$

Vade-mecum du produit vectoriel

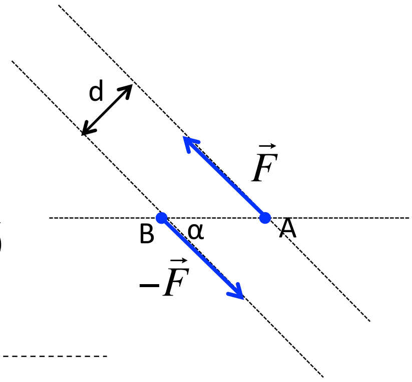
Propriétés importantes :

Physique

Couple de forces :

Couple : Paire de forces *opposées* dont les axes sont séparés de la distance d.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$



Le moment d'un couple est *indépendant* du point de référence.

$$\vec{C} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OB} \wedge \left(-\vec{F}\right) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

$$\left|\vec{C}\right| = |F||AB|\sin\alpha = |F|d$$