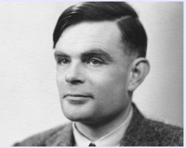
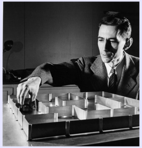
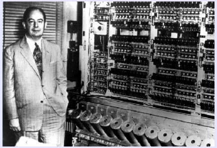
  

Information, Calcul et Communication

Compléments de cours

J.-C. Chappelier

$\exists\ c_j$ $\boxed{c_i}$

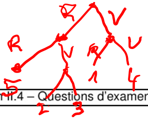
Leçon II.1 et II.2 – Examen final 2018 1.3

avec : $\exists\, c_i \quad c_j = c_i \dots$

Des séquences de cinq niveaux d'alerte météo doivent être transmises codées (code sans-préfixe et sans perte) sous forme de séquences de pastilles (ronds) rouges ou vertes. La table ci-dessous représente trois propositions de codes possibles. Malheureusement, ce sujet est tiré en noir et blanc ; la couleur verte ou rouge s'est donc perdue...

code I	code II	code III
niveau 1 : ●	niveau 1 : ●●	niveau 1 : ●●●
niveau 2 : ●●●●	niveau 2 : ●●●	niveau 2 : ●
niveau 3 : ●●	niveau 3 : ●●●	niveau 3 : ●●●
niveau 4 : ●●●●	niveau 4 : ●●	niveau 4 : ●
niveau 5 : ●●	niveau 5 : ●●	niveau 5 : ●●

Quel(s) code(s) (d'origine, avec les couleurs) êtes vous néanmoins sûr(e) de ne pas pouvoir utiliser pour la transmission désirée ?
Justifiez votre réponse.

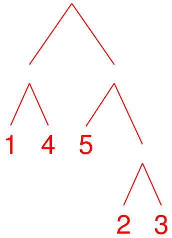


$\overset{?}{\exists}$ code ss-préfixe (de distribution de longueurs $\{l_i\}$)

$$\Longleftrightarrow \sum 2^{-l_i} \leq 1$$

Leçon II.1 et II.2 – Réponse

Les codes I et III ne peuvent pas être utilisés car ils ont nécessairement des mots qui sont préfixes d'autres :
à vérifier soit en utilisant l'inégalité de Kraft,
soit simplement en essayant d'affecter des couleurs aux mots les plus courts.
Le code II par contre *pourrait* (mais on n'est pas sûr) être un code utilisable ; p.ex. :



Leçon II.4 – Examen final 2018 1.2

À partir d'un alphabet de 33 lettres, on compose un mot X de 128 lettres de long ; chacune des lettres de l'alphabet étant présente au moins une fois dans le mot X.
Le code de Huffman de ce mot a une longueur moyenne de 5.5 bits.

A] Est-ce possible ? **Justifiez** votre réponse.
oui ça *semble* possible (réponse attendue)... ...mais en fait, c'est impossible

B] Si **oui**, donnez les *meilleures* bornes (haute et basse) que <u>vous</u> pouvez pour

2.1 l'entropie de ce mot :

$$L_c(\text{Huffman}(X)) - 1 \leq H(X) \leq \log_2(33) \simeq 5.044 \text{ ... ou : } \frac{166}{32} - \frac{3}{32}\log_2(3) \simeq 5.039$$

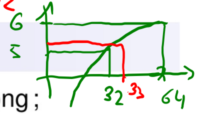
2.2 la longueur moyenne d'un code de Shannon-Fano de ce mot :

$$5.5 \leq L_c(\text{Shannon-Fano}(X)) \leq H(X) + 1$$

et si c'est **non**, donnez les *meilleures* bornes (haute et basse) que vous pouvez pour la longueur moyenne d'un code de Huffman de ce mot :

$$H(X) \leq L_c(\text{Huffman}(X)) \leq 5.047 \text{ (voir plus loin)}$$

5.5 $32 * \sqrt{2}$



Leçon II.4 – Examen final 2018 1.2

À partir d'un alphabet de 33 lettres, on compose un mot X de 128 lettres de long ; chacune des lettres de l'alphabet étant présente au moins une fois dans le mot X. Le code de Huffman de ce mot a une longueur moyenne de 5.5 bits.

$H(X) \leq \log_2(33)$

$5.\varepsilon$

1. Est-ce possible ? **Justifiez** votre réponse.
   oui ça *semble* possible (réponse attendue)...

   $L_c(\text{Huff}) < H(X) + 1$

2. Si **oui**, donnez les *meilleures* bornes (haute et basse) que vous pouvez pour

   $L_c(\text{Huff}) = 5.5$

   2.1 l'entropie de ce mot :

   $$4.5 \leq H(X) \leq$$

   2.2 la longueur moyenne d'un code de Shannon-Fano de ce mot :

   $$5.5 \leq L_c(\text{Shannon-Fano}(X)) \leq H(X) + 1$$

   et si c'est **non**, donnez les *meilleures* bornes (haute et basse) que vous pouvez pour la longueur moyenne d'un code de Huffman de ce mot :

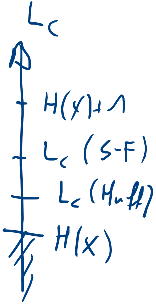
   $$\leq L_c(\text{Huffman}(X)) \leq$$

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 \overset{n}{33}$$

$$H(X) \leq L_c(\text{code qcq})$$

$$H(X) \leq \underbrace{L_c(\text{Huff}) < H(X) + 1}_{L_c(\text{Huff}) - 1 < H(X)}$$

$\forall$ code C (ss préfixe & ss perte) $\qquad L_c(\text{Huff}) \leq L_c(C)$



cas extrêmes

tableau

33 lettres

$$\overbrace{\underbrace{4\ 4\ \cdots\ 4}_{29}\ \underbrace{3\,3\,3\,3}_{4}}^{}$$

$$H_{max} = 29 \times \frac{4}{128} \log \frac{128}{4} + 4 \times \frac{3}{128} \log \frac{128}{3}$$

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{128}$$

$$128 = 4 \times 32$$

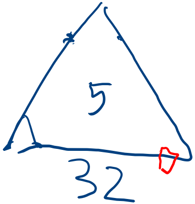
$$= 3 \times \cancel{4} + 29$$

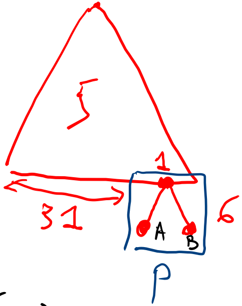
$$= \underbrace{3 \times 32}_{96} + 32$$

$$\overbrace{\underbrace{1 \cdots\cdots 1}_{32}\ 96}^{33}$$

H_{min}

$\forall$ Code C $\quad L_C(\text{Huff}) \leq \underbrace{L_C(C)}_{5+p}$





$p = p_A + p_B$

un p possible

$\frac{1}{128} + \frac{1}{128}$

$$L_C(C) = 5 + p$$

un autre p possible

$\frac{128}{33} \geq n_{max}^{3}$

$\hookrightarrow p = \frac{3}{128} + \frac{3}{128}$

Leçon II.4 – Réponse

A] Est-ce possible ? **Justifiez** votre réponse.
Réponse attendue : oui ça *semble* possible :

$$H(X) \leq \log_2(33) < L_c(\text{Huffman}(X))$$

et : $L_c(\text{Huffman}(X)) < \log_2(33) + 1$ (utiliser $\log_2(32) = 5$, $\log_2(33) = 5 + \log_2(33/32)$)

Ceci dit, le choix de 5.5 pour $L_c(\text{Huffman}(X))$ est un peu extrème et, en fait, trop grand.
On pourrait par exemple le majorer par un code (pas forcément optimal) ; p.ex. 31 à 5 bits, et deux à 6 bits
lequel donne une longueur moyenne de $5 + p$ (avec p la somme des probabilités des deux à 6 bits ; donc p compris entre $\frac{2}{128}$ et $\frac{6}{128}$ [sinon on aurait un meilleur code en en mettant d'autres à 6 bits : $128 - 33n_{max} \geq 0$: $128/33 \geq n_{max}$]),
donc une longueur moyenne de ce code entre 5.016 bits et 5.047 bits
qui donne un majorant inférieur à 5.5 : donc c'est, en fait, impossible d'avoir 5.5 (puisque le code de Huffman est optimal)
Mais je n'attends pas un tel niveau de raisonnement en examen en temps limité.

Leçon II.4 – Réponse

Si on veut faire l'étude complète de ce cas (mais veut-on la faire en examen ?), la situation varie entre

- 29 lettres apparaissent 4 fois et les 4 autres lettres apparaissent 3 fois ;

  ce qui fait une entropie de $\frac{29}{32} \times 5 + \frac{3}{32} \log_2(\frac{128}{3}) \simeq 5.039$ bit.

  et une longueur moyenne du code de Huffman de $\frac{646}{128} \simeq 5.047$ bits
  (31 fois 5 et 2 fois 6, donc exemple précédent avec $p = \frac{6}{128}$)

  (pour info $\log_2(33) \simeq 5.044$)

- 32 lettres apparaissent 1 fois et la dernière lettre apparait 96 fois,

  ce qui fait une entropie de $\frac{1}{4} \times 7 + \frac{3}{4} \log_2(\frac{4}{3}) \simeq 2.061$ bit

  et une longueur moyenne du code de Huffman de $\frac{288}{128} \simeq 2.25$ bits

Leçon II.4 – Illustration des cas extrêmes

H_{min} $\quad \underbrace{\overbrace{1 \cdots\cdots 1}^{32}\ 96}_{33} \longrightarrow 128$

H_{max} $\quad \underbrace{\overbrace{4 \cdots\cdots 4}^{29}\ \overbrace{3\,3\,3\,3}^{4}}_{33}$

Leçon III.1 (architecture des ordinateurs) – Points clés

- architecture de von Neumann :
  processeur (CPU), mémoire, périphériques
- composants d'un CPU :
  registres, ALU, Décodeur, pointeur de pile, contrôleur

  réalisés à l'aide de **transistors**
- mémoire : 2 inverseurs « tête-bêche » (= 4 transistors)
- compilation :
  - assembleur : registres, instruction (dont comparaisons et sauts)
  - langage machine : encodage binaire de l'assembleur (y compris opérandes)
- performances / énergie : jouer sur :
  - le délai ;
  - et le débit (parallélisme).

Considérez le code assembleur suivant :

```
 1: charge    r2,  0
 2: charge    r3,  0
 3: charge    r4, r3
 4: somme     r3, r3, 1
 5: somme     r4, r4, 1
 6: cont_ppe  r1, r4, 9
 7: somme     r2, r2, r4
 8: continue  5
 9: somme     r2, r2, r3
10: cont_pp   r3, r0, 3
```

où l'instruction « `cont_ppe a, b, N` » effectue le test « $a \leq b$ »
et l'instruction « `cont_pp a, b, N` » effectue le test « $a < b$ ».
Lequel de ces algorithmes correspond au code ci-dessus
(avec *n* chargé dans r0 et *m* dans r1) :

Entrée : n m

Sortie :

$r_2 \leftarrow 0$

$r_3 \leftarrow 0$

$r_4 \leftarrow r_3$

$++r_3$

$++r_4$

$r_2 \leftarrow r_2 + r_4$

$r_2 \leftarrow r_2 + r_3$

$m \leq r_4$: $r_4 < m$

$r_3 < n$

$1 \leq n \leq m$

A.

algoA

entrée : *deux entiers* $1 \leq n \leq m$
sortie : S

$S \longleftarrow 0$
$i \longleftarrow 0$
Tant que $i < n$
  $j \longleftarrow i$
  Tant que $j < m$
    Si $j < m$
      $S \longleftarrow S + j$
    Sinon
      $S \longleftarrow S + i$
Sortir : S

B.

algoB

entrée : *deux entiers* $1 \leq n \leq m$
sortie : S

$S \longleftarrow 0$
Pour i de n à 1 en descendant (de 1 en 1)
  Pour j de $m-1$ à i en descendant (de 1 en 1)
    $S \longleftarrow S + i$
  $S \longleftarrow S + j$
Sortir : S

C.

algoC
entrée : *deux entiers* $1 \leq n \leq m$ sortie : S

$S \longleftarrow 0$
Pour i de 1 à $n-1$
    Pour j de 1 à m
        $S \longleftarrow S+j$
    $S \longleftarrow S+i$
Sortir : S

*D.

algoD
entrée : *deux entiers* $1 \leq n \leq m$ sortie : S

Si $n=1$
    Sortir : $1+\frac{(m-1)\cdot m}{2}$
$s \longleftarrow n$
Pour i de $m-1$ à n en descendant (de 1 en 1)
    $s \longleftarrow s+i$
Sortir : $s+$**algoD**$(n-1,m)$

Leçon III.1 (Architecture des ordinateurs) – Réponse

Dans l'algorithme A, il manque les incréments de i et j dans leur boucle respective (boucles infinies).

Dans l'algorithme B, les deux lignes « $S \longleftarrow S+i$ » et « $S \longleftarrow S+j$ » ont été inversées (aucun sens !).

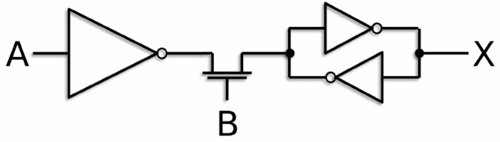
Les bornes de l'algorithme C ne sont pas correctes : la boucle en i devrait aller jusque n et celle en j de i à $m-1$ (à voir en testant le cas simple $n=1$).

L'algorithme D est une écriture récursive de ce que calcule le programme :

$$S(n,m) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=i}^{m-1} j\right)+i\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{j=i}^{m-1} j\right)+i\right) + \sum_{j=n}^{m-1} j + n = n + \sum_{j=n}^{m-1} j + S(n-1,m)$$

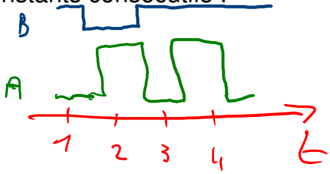
Leçon III.1 (Architecture des ordinateurs) – Étude de cas

On considère le système logique suivant :



auquel on soumet les entrées A et B suivantes à quatre instants consécutifs :

t	A	B	X
1	0	1	x_1
2	1	0	x_2
3	0	1	x_3
4	1	1	x_4



Quelles sont les quatre sorties (x_1, x_2, x_3, x_4) correspondantes ?

$X = A$ 0 0 0 1 lecture

Leçon III.1 (Architecture des ordinateurs) – Étude de cas

Quelle est la table de vérité du programme ci-contre (sachant que `r1` et `r2` contiennent soit 0 soit 1) ?

A]

r1	r2	r3
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	10

B]

r1	r2	r3
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

C]

r1	r2	r3
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

D] Aucune des trois.

```
1: cont_egal r1, 0, 5
2: cont_egal r2, 0, 5
3: charge r3, 0
4: continue 6
5: somme r3 r1 r2
6: // fin (stop)
```