EPFL Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 8/9

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

Soit K un corps ; dans la suite si n est un entier on ecrira "n" pour $n_K = n.1_K$. De meme si n n'est pas divisible par $\mathrm{car}(K)$ (de sorte que n_K est inversible), on ecrira n^{-1} ou $1/n$ pour l'inverse multiplicatif de n_K : par exemple si $\mathrm{car}K \neq 3$, on ecrira $2/3 = 2.3^{-1}$ pour $2_K.3_K^{-1}$.

Coefficients des applications lineaires

Soit $d \geqslant 1$, l'espace vectoriel produit K^d est muni d'une base dite base canonique qu'on notera

$$\mathscr{B}_d^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, \cdots, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_d^0 = (0, 0, \cdots, 1)\}.$$

Par exemple pour $d = 3$

$$\mathscr{B}_3^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3^0 = (0, 0, 1)\}.$$

Exercice 1. Soit $V = K^2$ et

$$\mathscr{B}^0 = \mathscr{B}_2^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1)\}$$

la base canonique.

1. Determiner pour quelles valeurs de $\mathrm{car}(K)$ la famille

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 2),\ \mathbf{e}_2 = (3, 1)\}$$

est une base de V. On suppose pour toute la suite que la caracteristique de K est telle que $\mathscr{B}$ est bien une base (on pourra meme supposer que $\mathrm{car}(K) = 0$ si on prefere).

2. Exprimer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ comme CL de $\mathbf{e}_1^0$ et de $\mathbf{e}_2^0$. Exprimer $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0$ comme CL de $\mathbf{e}_1$ et de $\mathbf{e}_2$.
3. On considere l'espace vectoriel des applications lineaires de V vers V

$$\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V).$$

Suivant qu'on choisit $\mathscr{B}^0$ ou $\mathscr{B}$ comme bases de V vu comme espace de depart ou comme d'arrivee, on obtient quatres bases possibles pour $\mathrm{Hom}_K(V, V)$:

$$\mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}.$$

4. Soit

$$\varphi = \mathrm{Id}_V : v \mapsto v$$

l'application identite de V. Calculer les coefficient $(m_{ij}(\varphi))_{i,j\leqslant 2}$ de φ relativement aux 4 bases ci-dessus. (les deux premiers cas ne demandent que tres peu de calculs et les autres pas trop de calculs une fois qu'on a fait la question 2).
5. Soit $\psi : V \mapsto V$ l'unique application lineaire telle que

$$\psi(1, 2) = (2, 4),\ \psi(3, 1) = (-3, -1).$$

Calculer $\psi(1, 0)$ et $\psi(0, 1)$ comme CL des elements de $\mathscr{B}^0$ et comme CL des elements de $\mathscr{B}$.
6. Calculer les coefficients de ψ relativement aux bases

$$\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}, \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}.$$

7. Calculer $\psi(x, y)$ pour tout $(x, y) \in K^2$ (par exemple en utilisant la formule pour l'image d'un vecteur en fonctions des coefficients de l'application lineaire relativement a des bases convenables).
8. Calculer les coefficients de $\psi^2 = \psi \circ \psi$ relativement aux bases

$$\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}, \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}.$$

Exercice 2. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^3$ definie par

$$\varphi(x, y) = (-x + 3y, 2x - y, x + y).$$

1. Donner une famille generatrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ puis donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. Donner une representation cartesienne de $\mathrm{Im}(\varphi)$ avec une nombre minimal d'equations.
3. Donner une representation cartesienne de $\ker(\varphi)$ avec une nombre minimal d'equations. Trouver une base de $\ker(\varphi)$.
4. Determiner les coefficient de φ relativement a $\mathcal{B}_{\mathscr{B}_2^0,\mathscr{B}_3^0}$.
5. Calculer directement $\varphi(3, 3)$. Retrouver ce resultat a l'aide de la formule calculant l'image d'un vecteur par une application lineaire en fonction des coefficients de celle-ci.

Un peu d'algebre lineaire abstraite

Exercice 3. Soit V un K-EV de dimension finie, X, Y des sous-espaces de dimension $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$ et $\mathscr{B}_X = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_x\}$, $\mathscr{B}_Y = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_y\}$ des bases de X et Y.

1. Montrer que si $V = X \oplus Y$ alors on a $\mathscr{B}_X \cap \mathscr{B}_Y = \emptyset$ et
$$\mathscr{B}_X \cup \mathscr{B}_Y = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_x, \mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_y\}$$
est une base de V.

Exercice 4. (*) Soit V un K-EV de dimension d. Un endomorphisme $\pi : V \mapsto V$ est appele projecteur si π verifie (dans $\mathrm{End}(V)$)
$$\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi.$$

1. Montrer que si π est un projecteur $\ker \pi \cap \mathrm{Im}\, \pi = \{0_V\}$.
2. Montrer (sans calcul mais en utilisant un exercice de la serie precedente) que $V = \ker \pi \oplus \mathrm{Im}\, \pi$.
3. Soit $v \in V$. Que vaut $\pi(v - \pi(v))$? En deduire une decomposition explicite d'un vecteur $v \in V$ sous la forme
$$v = v_0 + v_1 \text{ avec } v_0 \in \ker \pi,\ v_1 \in \mathrm{Im}\, \pi.$$
4. Soit $\mathscr{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{d_0}\} \subset \ker \pi$ et $\mathscr{B}_1 = \{\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_{d_1}\} \subset \mathrm{Im}\, \pi$ des bases du noyau et de l'image. Montrer que
$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_0 \cup \mathscr{B}_1$$
est une base de V et en particulier $d = d_0 + d_1$. Calculer les coefficients $(m_{ij})_{\substack{i \leqslant d \\ j \leqslant d}}$ de π dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$.

Dualite

Exercice 5 (bi-dual)**.** Soit V un K-EV de dimension finie d, $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ son dual et
$$V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$$
le bi-dual de V (le dual du dual V^* de V).

1. Montrer (sans calculs) que V et V^{**} sont isomorphes. On va donner une isomorphisme explicite et canonique.

2. Pour $v \in V$, on considere l'application "evaluation au point v" qui a une forme lineaire $\ell : V \mapsto K$ associe sa valeur au vecteur v :
$$\mathrm{eval}_v : \ell \mapsto \mathrm{eval}_v(\ell) := \ell(v) \in K.$$
Montrer que eval_v est lineaire (sur V^*) et definit donc un element de V^{**}.
3. On considere alors l'application :
$$\mathrm{eval}_\bullet : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & V^{**} \\ v & \mapsto & \mathrm{eval}_v \end{array}.$$
Montrer que $\mathrm{eval}_\bullet$ est lineaire et injective. En deduire que c'est un isomorphisme de V vers V^{**}.
4. Soit $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ une base de V, $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_i^*,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ la base duale et
$$\mathscr{B}^{**} = \{\mathbf{e}_i^{**},\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$$
de la base duale de $\mathscr{B}^*$ (la bi-duale) : c'est a dire l'unique famille de forme lineaires sur V^* verifiant
$$\mathbf{e}_i^{**}(\mathbf{e}_j^*) = \delta_{ij}.$$
Montrer que l'image de $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ par l'isomorphisme $\mathrm{eval}_\bullet$ est precisement la biduale $\mathscr{B}^{**}$.

Remarque 0.1. On rappelle que le choix d'une base $\mathscr{B}$ de V definit deux isomorphismes
$$\mathrm{eval}_{\mathscr{B}} : V^* \simeq K^d,\ CL_{\mathscr{B}} : K^d \simeq V$$
et donc un isomorphisme "explicite"
$$CL_{\mathscr{B}} \circ \mathrm{eval}_{\mathscr{B}} : V^* \simeq V$$
entre le dual V^* et V. Il faut noter que cet isomorphisme depend du choix de la base $\mathscr{B}$.

En revanche, l'isomorphisme reciproque
$$\mathrm{eval}_\bullet^{-1} : V^{**} \simeq V$$
ne depend pas du choix d'une base. On dit que le bidual de V est canoniquement isomorphe a V.

Exercice 6. Soit V, W deux EVs de dimensions finies. On rappelle que etant donne $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire, sa duale $\varphi^* : W^* \mapsto V^*$ est l'application qui a toute forme lineaire $\ell : W \mapsto K$ sur W associe la forme lineaire sur V
$$\varphi^*(\ell) = \ell \circ \varphi : v \mapsto \ell(\varphi(v)) \in K.$$

1. Montrer que l'application $\bullet^*$ qui a une application lineaire de V vers W associe l'application lineaire duale (de W^* vers V^*)

$$\bullet^* : \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$$

   est elle meme lineaire :

$$\bullet^* \in \ \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Hom}(W^*, V^*)).$$

   En d'autres termes pour $\lambda \in K$, $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on a

$$(\lambda\varphi + \varphi')^* = \lambda.\varphi^* + \varphi'^*$$

2. Soit $\psi : W \mapsto Z$ une autre application lineaire vers un espace vectoriel Z. On a alors la composee $\psi \circ \varphi : V \mapsto Z$ et l'application duale $(\psi \circ \varphi)^* : Z^* \mapsto V^*$. Montrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

3. On a vu que le bi-dual V^{**} est identifie a V via l'isomorphisme

$$\mathrm{eval}_\bullet : v \in V \mapsto \mathrm{eval}_v = (\ell \mapsto \ell(v)) \in V^{**}.$$

   Montrer que sous cette identification la duale de la duale qu'une application φ est egale l'application elle-meme :

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

Exercices pour la semaine du 21 Novembre

Exercice 7. Determiner le rang des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ M.N$$

en fonction de la caracteristique du corps K.

Exercice 8. Soient $\varphi : U \mapsto V$ et $\psi : V \mapsto W$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) \leqslant \mathrm{rg}(\psi)$ (on pourra comparer deux images).
2. Montrer que $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) \leqslant \mathrm{rg}(\varphi)$ (on pourra comparer deux noyaux).
3. Montrer que si M, N sont des matrices de dimensions convenables

$$\mathrm{rg}(M.N) \leqslant \mathrm{rg}(M), \ \mathrm{rg}(M.N) \leqslant \mathrm{rg}(N).$$

4. Montrer la deuxieme inegalite ci-dessus en utilisant la premiere ainsi que des proprietes de la transposition.

Produits de matrices

Exercice 9. Effectuer tous les produits possibles des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit K un corps et pour $d \geqslant 2$

$$\mathscr{B}_{22}^0 := \{E_{ij}, \ i, j \leqslant 2\} \subset M_2(K)$$

l'ensemble des matrices elementaires de taille 2 (on rappelle que c'est une base de $M_2(K)$: on l'appelle la base canonique de $M_2(K)$).

On definit les SEVs suivants de $M_2(K)$:

$$D_2(K) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}) \ \textit{et} \ T_2(K) = \mathrm{Vect}(E_{11}, \ E_{12}, \ E_{22}).$$

1. Quelles sont les dimensions de ces SEVs ? Donner la forme generale d'une matrice dans ces deux ensembles ; comment appelle-t-on ces ensembles de matrices ?
2. Montrer que ces SEVs sont stables par produits et sont en fait des sous-algebres de $M_2(K)$.
3. Lesquelles de ces sous-algebres sont commutatives ?

Exercice 11. ($\star\star$) Soit K un corps. On considere la matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

1. Calculer $M^2 = M.M, M^3 = M.M.M$, et trouver $a_0, a_1, a_2 \in K$ tels que

$$\mathbf{0}_3 = M^3 + a_2.M^2 + a_1.M + a_0.\mathrm{Id}_3.$$

2. Montrer (par recurrence) que pour tout $k \geqslant 3$, M^k est combinaison lineaire de $\{M^2, M, \mathrm{Id}_3\}$.
3. On note

$$\begin{aligned} K[M] &= \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_3, M, M^2, \cdots, M^k, \cdots) \\ &= \{a_0.\mathrm{Id}_3 + a_1.M + \cdots a_d.M^d, d \geqslant 1, \ a_0, a_1, \cdots, a_d \in K\} \subset M_3(K) \end{aligned}$$

l'espace vectoriel des matrices engendre par toutes les puissances de M (on pose $M^0 = \mathrm{Id}_3$).

(a) Montrer que

$$K[M] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_3, M, M^2).$$

Quelle est la dimension de $K[M]$?

(b) Montrer que $K[M]$ est stable par produit et que c'est un sous-anneau de $M_3(K)$.

Exercice 12. On rappelle la formule generale (8.1.4) du cours (on renvoie au cours pour les notations) :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}''\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}''\mathscr{B}'}(\psi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\varphi).$$

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On la considere comme un endomorphisme π de l'espace K^4 exprimee dans la base canonique

$$\mathscr{B}^0 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

1. Montrer que $\pi^2 = \pi$. Ainsi (voir la serie precedente) π est un projecteur et on a
$$K^4 = \mathrm{Im}\,\pi \oplus \ker \pi.$$
2. Trouver une base de $\ker \varphi$ et une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$.
3. Montrer qu'il existe une base convenable $\mathscr{B}_n$ de K^4 telle que la matrice de π dans cette base soit egale a la matrice carre de cote 4 et de rang 2
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n}(\pi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n\mathscr{B}_n}(\pi) = I_{4\times 4}(2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. On pose $C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}^0\mathscr{B}_n}(\mathrm{Id}_{K^4})$. Que vaut cette matrice ? Montrer qu'elle est inversible et que
$$C^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n\mathscr{B}^0}(\mathrm{Id}_{K^4})$$
(on ne demande pas de calculer C^{-1}).
5. Montrer la formule
$$P_2 = C^{-1}.M.C$$
(il n'est pas necessaire de calculer C^{-1}).