Math 110 : Algebre Lineaire Avancee

Al-Khwarizmi,

Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala

Abrege du calcul par la restauration et la comparaison.

$$2(a+1) = 81+1 = 82$$

$$a+1 = 41$$

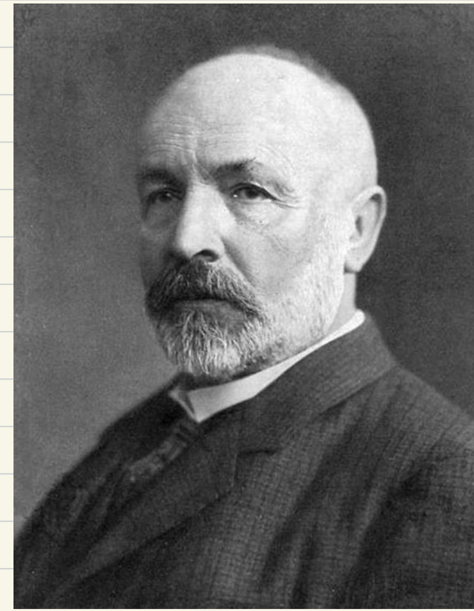
$$a = 40$$

Prologue

Le Langage des Ensembles

“Le langage est un ensemble de citations.”

Z F (C)



Logique des Predicats du 1er Ordre

Un langage avec un alphabet et une grammaire

- **Alphabet** = ensemble symboles (lettres) pour designer des variables, des constantes Predicats, formules fonctions

Quantificateurs logiques

- Universel : $\forall$ (quelque soit, pour tout)

$\forall x \quad P(x)$: pour tout x la propriété $P(x)$ est vraie

- Existentiel : $\exists$ (il existe)

$\exists x \quad P(x)$: il existe x tel que $P(x)$ est vraie "tel que" $\quad |$

$$\exists x \; P(x) \iff \exists x \mid P(x)$$

- $\exists!$ il existe un unique

- Symbole d'égalité $=$

Connecteurs logiques :

$\wedge$: "et"

$\vee$: "ou"

$\neg$ symbole de "négation" "contraposée" "pas"

$\Longrightarrow$ "implique"

$\Longleftrightarrow$ "équivaut à" "si et seulement si"

- Regles de syntaxe pour former des phrases "correcte"

- Systeme de deduction permettant de deduire d'enoncés "vrais" d'autres enonces "vrais"

Axiomes de la Theorie

ZF(C)

Relation d'appartenance

La categorie des ensembles c'est une collection d'objets "Les ensembles" tels que certains sont liés par une relation d'appartenance a, A

$$a \in A$$

a appartient a A

a appartient à A

a est élément de A

Cette relation donne lieu a une relation d'inclusion

A et B sont des ensemble

on dit que A est inclut ds B

$$A \subset B$$

si tout element de A est element de B

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in B$$

On dit que A est sous-ensemble de B

Ensemble vide

Il existe un ensemble qui ne contient aucun element et qui est contenu dans tout ensemble, l'ensemble vide

$$\emptyset$$

$$\forall E \quad E \notin \emptyset \wedge \emptyset \subset E$$

Axiome de la double inclusion

Deux ens. sont egaux ssi ils ont les mêmes elements.

A, B ens

$$A = B \iff \forall a \in A \Rightarrow a \in B \text{ et }$$
$$\forall b \in B \Rightarrow b \in A$$

Parties d'un Ensemble

Soit A ens. il existe un ensemble dont les elements sont les sous-ensembles de A : l'ensemble des Parties de A

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subset A \}$$

Ex : $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$

Axiome de la Reunion

Soit E un ensemble il existe un ensemble $\underset{E}{\cup}$ "la reunion de E" dont les elements sont les elements des sous-ensembles de E.

Axiome de la Paire

Soient A et B des ensembles

il existe un ensemble dont les éléments

sont A et B

$$\{A, B\}$$

le singleton

Rmq : si $A = B$ $\{A, A\} = \{A\}$ $\{A\}$

+ d'autres axiomes... Axiome du choix.

Reunion d'ensembles

A, B des ensembles on peut construire $\{A,B\} = \{B,A\}$ si on applique l'axiome de la reunion a l'ensemble $\{A,B\}$

$$\bigcup_{\{A,B\}} =: A \cup B$$

$A \cup B$ est un ensemble dont les elts sont les element de A et les elts de B.

Plus generalement si I est un ens. et $(A_i)_{i \in I}$ est une collection d'ens. indexes par I : $\forall i \in I$ on se donne

ens. A_i

on forme

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \text{l'ensemble dont les elts sont les elts de } A_i \text{ pour un certain } i \in I.$$

Intersection

- $A \cap B = \{ e \mid e \in A \wedge e \in B \}$

$A \cap B \subset A \qquad A \cap B \subset B$

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ e \mid \forall i \in I \ \ e \in A_i \}$

Construction de $\mathbb{N}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- $0 := \emptyset$

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} =: 1 \ni 0$

Paire - $\{\emptyset, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} =: 2$

Axiome de l'infini

- $3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

- $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ ...... $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

soient $m, n \in \mathbb{N}$ on pose

$$m \leq n \iff m \subset n$$

- $0 \leq 1$, $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

  $1 \leq 2$, $1 = \{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$

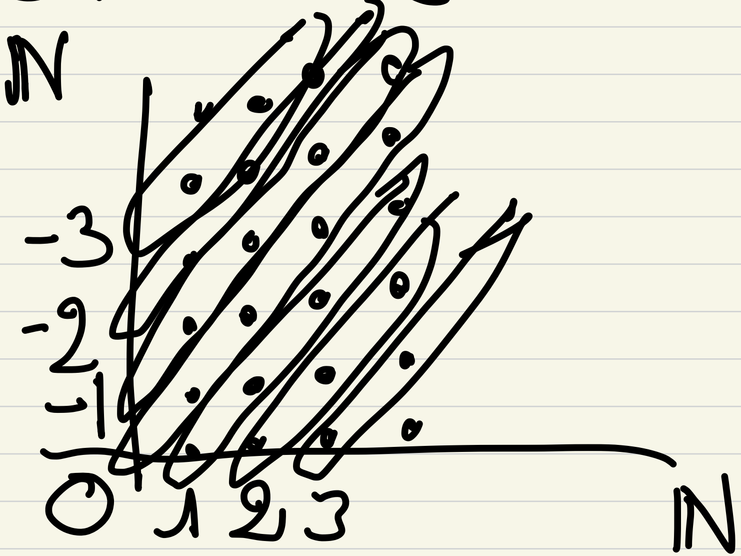
$\rightsquigarrow$ $\mathbb{Z} = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \; p, q \in \mathbb{Z} \; q \neq 0 \} \to \mathbb{R}$

$\emptyset \subset \{0\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{1\} \subset$

$0 \in \mathbb{N} \qquad 1 \in \mathbb{N}$



Produit Cartesien

A, B 2 ensembles $a \in A$ $b \in B$

$(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$ = paire ordonnée (a,b)

si $a \neq b$ $(a,b) \neq (b,a)$ | si $a=b$ alors $(a,b)=(b,a)$

alors que $\{a,b\} = \{b,a\}$

$\{\{a,b\}, a\} = \{a, \{a,b\}\}$

Le produit cartesien $A \times B$

$$A \times B = \{ (a,b) \quad a \in A, b \in B \}$$

Rmq: si $A = \emptyset$

$A \times B = \emptyset$

$\emptyset \times B = \emptyset$

si $B = \emptyset$

$A \times \emptyset = \emptyset$

Si $A = B$ $A \times A = A^2$

si on peut iterer $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2)\}$
$= (a_i)_{i=1,2}$

$A_1, \dots, A_n$ sont des ensemble on forme

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

$(a_1, \dots, a_n) = (a_i)_{i \leq n}$ est un n-uplet forme des elts des A_i $i \leq n$

Axiome du Choix : I ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une collection d'ensemble indexes par I on veut forme un ens

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \quad \forall i\in I \quad a_i\in A_i\}$$