EPFL — Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 1

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres environ 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) sur moodle avant la date indiquee, sous forme de fichier pdf.

1 Ensembles et applications

Exercice 1. Soit X un ensemble. Pour A, B des sous-ensembles de X on defini la difference de A et B

$$A - B := \{x \in A,\ x \notin B\} \subset X$$

(les elements de A qui ne sont pas des elements de B). En particulier

$$X - A = \{x \in X,\ x \notin A\} \subset X$$

est appelle le *complementaire* de A dans X et est note A^c.

On defini alors la difference symetrique de A et B en posant

$$A\Delta B := A \cup B - A \cap B = \{x \in A \cup B,\ x \notin A \cap B\} \subset X$$

(les elements de X qui sont dans la reunion de A et B et qui ne sont pas dans leur intersection).

1. Montrer que $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
2. Calculer $\emptyset \Delta A$, $A\Delta A$, $A\Delta X$, $A\Delta A^c$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Pour $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, on pose

$$A \boxplus B := \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}),\ A \boxtimes B := \{a.b,\ a \in A,\ b \in B\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}),$$

l'ensemble de toutes les sommes (resp. de tous les produits) d'elements de A et de B.

Soit $q \geqslant 1$ un entier. On note $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \subset \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ les classes de congruences modulo q : c'est a dire l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ de la forme

$$a \,(\mathrm{mod}\, q) := a + q\mathbb{Z} = \{a + q.k,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que

$$a \,(\mathrm{mod}\, q) = a' \,(\mathrm{mod}\, q) \Longleftrightarrow a - a' = qk \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

2. Soient $a \,(\mathrm{mod}\, q),\ b \,(\mathrm{mod}\, q) \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Montrer que

$$a \,(\mathrm{mod}\, q) \boxplus b \,(\mathrm{mod}\, q) = a + b \,(\mathrm{mod}\, q),$$

$$a \,(\mathrm{mod}\, q) \boxtimes b \,(\mathrm{mod}\, q) \subset a.b \,(\mathrm{mod}\, q).$$

3. Donner un exemple ou cette derniere inclusion est stricte (n'est pas une egalite). Donner un exemple (avec $q \neq 1$) ou cette derniere inclusion est une egalite.

Exercice 3. Soit
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})\}$$
l'ensemble des nombres rationels.

1. On considere l'application

$$2^{(\bullet,\bullet)} : (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \mapsto 2^{(p,q)} := (2^p)^{1/q} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Montrer que cette application permet de definir une application de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}_{>0}$ notée
$$2^\bullet : x \in \mathbb{Q} \to 2^x \in \mathbb{R}_{>0}$$
qui vérifie pour tout $(p, q) \in\in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$

$$2^{p/q} = 2^{(p,q)}.$$

2. On considere l'application

$$(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \mapsto p + q \in \mathbb{Z}.$$

Pourquoi cette application ne permet-elle pas de definir une application de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Z}$ en posant $p/q \mapsto (p, q) \mapsto p + q$?

Exercice 4. On reprend les definitions/notations de l'exercice 2 dans le cas $q = 4$.

1. On considere l'application

$$\iota^\bullet : a \in \mathbb{Z} \mapsto \iota^a \in \mathbb{C}$$

(ou ι est le nombre complexe tel que $\iota^2 = -1$). Montrer que cette application permet de definir une application de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{C}$ donnee par

$$\iota_4^\bullet : a \,(\mathrm{mod}\, 4) \mapsto i^a$$

et que

$$\iota^\bullet = \iota_4^\bullet \circ \pi_4.$$

(resoudre d'abord la question 1. de l'exercice 2).

Exercice 5. On considere l'application

$$f : x \in \mathbb{R}_{\geqslant -2} \mapsto x^3 - x \in \mathbb{R}.$$

1. Que vaut $f([-2, +\infty[)$? Que vaut $f([0, +\infty[)$?
2. Que vaut $f^{-1}([0, +\infty[)$? Que vaut $f^{-1}([-2, +\infty[)$?
3. Cette application est elle injective ?
4. Cette application est elle surjective ?
5. Comment modifier l'espace d'arrivee pour la rendre surjective ?
6. Trouver x_0 le plus petit possible pour cette application avec l'espace de depart $\mathbb{R}_{\geqslant x_0}$ soit injective.

Exercice 6. Soit $f : X \mapsto Y$ une application entre ensembles.

1. Montrer que pour tous sous-ensembles $A, B \subset X$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

2. (a) Montrer que pour tout $A, B \subset X$ des sous-ensembles, on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B);$$

   (b) donner un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

   (c) Montrer que si f est injective on a

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

3. Montrer que pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$ de Y on a

$$f^{(-1)}(C \cup D) = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D).$$

4. Montrer que pour tout pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$ de Y, on a
$$f^{(-1)}(C \cap D) = f^{(-1)}(C) \cap f^{(-1)}(D).$$
5. Montrer que
$$f \text{ est injective } \iff \forall A \subset X,\ f^{(-1)}(f(A)) = A.$$
6. Montrer que
$$f \text{ est surjective } \iff \forall C \subset Y,\ f(f^{(-1)}(C)) = C.$$
7. Montrer que pour $A \subset X$, on a
$$A \subset f^{(-1)}(f(A)).$$
Montrer par un exemple on n'a pas forcement l'egalite
$$A = f^{(-1)}(f(A)).$$
Soit $B \subset Y$, existe-t-il (en general) une relation d'inclusion entre B et $f(f^{(-1)}(B))$?

Exercice 7. Soient X, Y, Z des ensembles (pas forcement finis) et $\phi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ deux applications entre les ensembles X et Y et les ensembles Y et Z et $\varphi = \psi \circ \phi : X \to Z$ l'application composee.

1. Montrer que si φ est surjective alors ψ est surjective. Donner un exemple montrant que ϕ ne l'est pas forcement.
2. Montrer que si φ est injective alors ϕ est injective. Donner un exemple montrant que ψ ne l'est pas forcement.

Exercice 8. ($\star$) On veut montrer le resultat de Cantor : l'application polynomiale (de Cantor)
$$C : (m, n) \mapsto ((m + n)^2 + m + 3n)/2$$
et une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$. Pour cela

1. Verifier que C est une application de $\mathbb{N}^2$ a valeurs vers $\mathbb{N}$.
2. Calculer les valeurs $C(m, n)$ pour $m + n \leqslant 3$ et les reporter sur les point $(, n) \in \mathbb{Z}^2$ d'une representation du quart de plan $\{(x, y),\ x, y \geqslant 0\}$.
3. Pour $k \geqslant 0$ un entier, on definit le sous-ensemble
$$D_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m + n = k\}.$$
Quelles sont les valeurs prises par $C(m, n)$ quand (m, n) decrit D_k ?
4. En deduire l'injectivite et la surjectivite de C.

Remarque. Une autre application possible (obtenue par symetrie) est
$$C'(m, n) = ((m + n)^2 + 3m + n)/2.$$
On ne sait pas si il y a d'autre applications polynomiales etablissant une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

2 Quelques groupes commutatifs

Exercice 9. Soit $G = [0,1[$ et $\oplus : G \times G \mapsto \mathbb{R}$ la loi de composition definie par

$$x \oplus x' := \begin{cases} x + x' & \text{si } x + x' < 1 \\ x + x' - 1 & \text{si } x + x' \geqslant 1 \end{cases}.$$

Montrer que $\oplus$ est a valeurs dans G et trouver un element neutre $0_G \in G$ et une application inversion $\ominus : G \mapsto G$ telles que

$$(G, \oplus, 0_G, \ominus)$$

forme un groupe commutatif.

Exercice 10. Dans l'exercice 2, on a defini pour $q \geqslant 1$ un entier non nul, l'ensemble des classes de congruences modulo q

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{a \pmod q),\ a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{Z})$$

avec

$$a \,(\mathrm{mod}\, q) := a + q\mathbb{Z} = \{a + q.k,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

On defini l'application

$$\pi_q : a \in \mathbb{Z} \mapsto a \,(\mathrm{mod}\, q) \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

D'autre part, pour $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, on a pose

$$A \boxplus B := \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}).$$

On definit egalement

$$\boxminus A := \{-a,\ a \in A\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}),$$

l'ensemble des opposes des elements de A.

1. Montrer que π_q est surjective.
2. Que vaut $\pi_q^{(-1)}(\{a \,(\mathrm{mod}\, q)\}) \subset \mathbb{Z}$?
3. Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$?
4. Montrer que
$$\boxminus(a \,(\mathrm{mod}\, q)) = -a \,(\mathrm{mod}\, q)$$
5. Montrer que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \boxplus, 0 \,(\mathrm{mod}\, q), \boxminus)$ forme un groupe commutatif.

Exercice 11. Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X. La difference symetrique discutee dans l'exercice 1 defini une application

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) & \mapsto & \mathscr{P}(X) \\ (A, B) & \mapsto & A \Delta B \end{array}$$

et donc une loi de composition sur $\mathscr{P}(X)$.

1. Montrer que cette loi de composition est associative et commutative.
2. Trouver un element neutre $e_\Delta \in \mathscr{P}(X)$ et une application d'inversion

$$\bullet^{-1} : \mathscr{P}(X) \mapsto \mathscr{P}(X)$$

de sorte que $(\mathscr{P}(X), \Delta, e_\Delta, \bullet^{-1})$ forme un groupe commutatif.

Exercice 12. Montrer qu'un groupe fini $(G, \star, e_G, \bullet^{-1})$ de cardinal $|G| = 2$ est toujours commutatif.