Principes Mathématiques de la Phys Quant.

von Neumann et Dirac 1930 ~ 1935.

et sont toujours valables tels quels aujourd'hui.

- Cadre conceptuel de la phys quant est l'espace de Hilbert : esp vectoriel de dimension finie muni du pr scalaire sur le corps des nombres $\mathbb{C}$.

  - vecteurs à composantes complexes.
  - pr scalaire.

1) Alg linéaire mais en Notation de Dirac.

2) Enoncé les principes proprement dits.

① Alg linéaire et notation de Dirac.

$\boxed{\text{Esp d'Hilbert } \mathcal{H}}$ = esp vect sur le corps $\mathbb{C}$ muni d'un pt sc.

↓

inf quantique cet esp est de dim finie. Penser aux vecteurs comme à des colonnes à composantes complexes.

$\vec{\phi}$ en notation de Dirac $|\phi\rangle$ un ket.

$\underbrace{\vec{\phi}^{T,*}}_{\text{transposé + complexe conjugué}}$ ligne en notation de Dirac $\langle \phi |$ bra.

↑

"conjugué de Dirac"

Le produit scalaire :

$$|\phi\rangle \text{ et } |\psi\rangle \longmapsto \overbrace{\langle \phi | \psi \rangle}^{\vec{\phi}^{T,*}\cdot\vec{\psi}} \in \mathbb{C} \quad \text{nombre complexe.}$$

(i) $\underbrace{\langle \phi | \phi \rangle}_{\vec{\phi}^{T,*}\cdot\vec{\phi}} \geq 0$ et $= 0$ ssi $|\phi\rangle = 0$.

(ii) $\langle \phi | (\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle) = \alpha \langle \phi | \psi_1 \rangle + \beta \langle \phi | \psi_2 \rangle$.

ici α et $\beta \in \mathbb{C}$.

(iii) $\overline{\langle \phi | \psi \rangle} = \langle \psi | \phi \rangle$.

Esp d'Hilbert du bit quantique.

Exemples.

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ esp du vect $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ avec α et $\beta \in \mathbb{C}$.

pr. ce $|\phi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$

$$\langle\phi| = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

et $\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\bar{\alpha}, \bar{\beta})\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta$.

(Vérifier les propriétés (i), (ii) et (iii). ← exercice.).

Note : pour que $|\phi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ décrive un vrai bit quantique.

il faut une condition : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 = \langle\phi|\phi\rangle$.

Normalisation.

- Deuxième exemple dont on ne va pas s'occuper de ce cours :

corpuscule dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ = esp de fonctions de carré intégrable

$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ avec $\int_{\mathbb{R}^3} d^3\underline{r}\, |\psi(\underline{r})|^2 < \infty$ finie.

(voir chap 1 et exp fentes de Young)

A partir d'esp d'Hilberts simples → esp plus grands.

utile pour décrire plusieurs bits quantique.

Produit Tensoriel :

$\mathcal{H}_1$; $\dim \mathcal{H}_1 = d_1$ vect avec d_1 composantes.

$\mathcal{H}_2$; $\dim \mathcal{H}_2 = d_2$ " d_2 "

pr sc de $\mathcal{H}_1$: ${}_1\langle \psi | \phi \rangle_1$; Base de vect $\{|u_i\rangle_1, i=1 \dots d_1\}$

pr sc de $\mathcal{H}_2$: ${}_2\langle \psi | \phi_2 \rangle$; Base de vect $\{|v_j\rangle_2, j=1 \dots d_2\}$

Esp produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ formé de la façon suivante : Base de vecteurs formée de tous les couples $(i,j) \rightarrow d_1 d_2$ couples. On utilise la notation

$$\{ |u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2 . \} \leftarrow \text{Base de } \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 .$$

L'esp total est donné par les combinaisons linéaires :

$$\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} c_{ij} |u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2 . \text{ et } c_{ij} \in \mathbb{C} .$$

Quel est le pr. sc ?.. Défini par :

$$\left({}_1\langle u_{i'}| \otimes {}_2\langle v_{j'}|\right)\left(|u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2\right).$$

$$\equiv {}_1\langle u_{i'} | u_i\rangle_1 \cdot {}_2\langle v_{j'} | v_j\rangle_2$$

<u>Remarque</u> si $\{|u_i\rangle_1 \; i=1 \dots d_1\}$ est orthonormée

et si $\{|v_j\rangle_2 \; j=1 \dots d_2\}$ est orthonormée

alors la base $\{|u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2\}$ est aussi orthonormée.

$d_1 d_2$ vects de base

<u>Notation</u> : $|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle \equiv |u_i, v_j\rangle$

on enlève les indices 1 et 2

et on se rappelle que le 1^er vect $\in \mathcal{H}_1$, le 2^ème vect $\in \mathcal{H}_2$.

on enlève $\otimes$, et on met une virgule.

Exemple de deux bits quantiques :

$\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$: base $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow |0\rangle$ et $|1\rangle$

$\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$: base $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow |0\rangle$ et $|1\rangle$.

(pol du photon $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |x\rangle = |0\rangle$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |y\rangle = |1\rangle$).

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ esp vect défini par la base avec 4 vecteurs :

$$\underbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle}_{|0,0\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \qquad \underbrace{|0\rangle \otimes |1\rangle}_{|0,1\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{|1\rangle \otimes |0\rangle}_{|1,0\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}} \qquad \underbrace{|1\rangle \otimes |1\rangle}_{|1,1\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\gamma\\\alpha\delta\\\beta\gamma\\\beta\delta\end{pmatrix} \leftarrow \text{règle pour faire le pr tensoriel en composante.}}$$

vecteur général de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$:

$$|\phi\rangle = \alpha_{00}\overbrace{|00\rangle}^{|0\rangle\otimes|0\rangle} + \alpha_{01}\overbrace{|01\rangle}^{|0\rangle\otimes|1\rangle} + \alpha_{10}\overbrace{|10\rangle}^{|1\rangle\otimes|0\rangle} + \alpha_{11}\overbrace{|11\rangle}^{|1\rangle\otimes|1\rangle} = \begin{pmatrix}\alpha_{00}\\ \alpha_{01}\\ \alpha_{10}\\ \alpha_{11}\end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$.

colonne avec 4 composantes complexes.

produit scalaire :

$$|\psi\rangle = \beta_{00}|00\rangle + \beta_{01}|01\rangle + \beta_{10}|10\rangle + \beta_{11}|11\rangle.$$

$$\langle\psi| = \bar{\beta}_{00}\underbrace{\langle 00|}_{\langle 0|\otimes\langle 0|} + \bar{\beta}_{01}\langle 01| + \bar{\beta}_{10}\langle 10| + \bar{\beta}_{11}\langle 11|.$$

$$= \underline{(\bar{\beta}_{00}, \bar{\beta}_{01}, \bar{\beta}_{10}, \bar{\beta}_{11}).}$$

$\langle\psi|\phi\rangle$ = par linéarité on trouve

$$= \bar{\beta}_{00}\alpha_{00} + \bar{\beta}_{01}\alpha_{01} + \beta_{10}\alpha_{10} + \bar{\beta}_{11}\alpha_{11}$$

Exercice à vérifier en notation de Dirac : $|00\rangle; |01\rangle; |10\rangle; |11\rangle$ base orthonormée

$$\langle 00|00\rangle = \langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle = 1, \ldots \langle 01|10\rangle = \langle 0|1\rangle\langle 1|0\rangle = 0$$

■

Inégalité de Cauchy - Schwarz :

$$|\langle \phi | \psi \rangle| \leqslant \langle \phi | \phi \rangle^{1/2} \langle \psi | \psi \rangle^{1/2} .$$

Dév sur une base orthonormée et relation de fermeture :

$\mathcal{H}$ avec base $\{ |u_i\rangle \, ; \, i = 1 \dots d \}$ orthonormée,

tout $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} c_i \, |u_i\rangle$ (*)

multiplions (*) à gauche par un bra $\langle u_j|$:

$$\langle u_j | \phi \rangle = \sum_{i=1}^{d} c_i \underbrace{\langle u_j | u_i \rangle}_{\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}} = c_j .$$

Réécrire (*) comme : $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} |u_i\rangle \langle u_i | \phi \rangle$

$$|\phi\rangle = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} |u_i\rangle \langle u_i| \right)}_{\text{agit sur } |\phi\rangle \text{ trivialement comme l'identité}} |\phi\rangle .$$

agit sur $|\phi\rangle$ trivialement comme l'identité.

En effet $\underbrace{|u_i\rangle}_{\text{ket}}\underbrace{\langle u_i|}_{\text{bra}} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i^{\,T,*}$.

ket : vect colonne $\vec{u}_i$

bra : vect transposé $u_i^{T,*}$

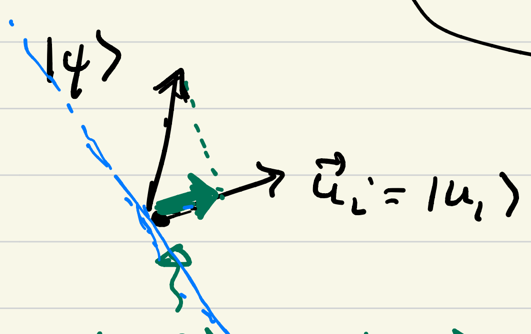
$\downarrow$ Matrice.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} |u_i\rangle\langle u_i| = \text{Matrice} = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$d \times d$.

Projecteur orthogonal.

ici en fait $|u_i\rangle\langle u_i|$ = matrice = matrice de projection sur le vecteur $|u_i\rangle$.



$$\underline{|u_i\rangle}\,\underline{\langle u_i|\psi\rangle}$$

direction

longueur de la proj.

En fait si $\{|u_i\rangle ; i=1 \dots d\}$ sont une base orthonormale

$P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$

$P_j = |u_j\rangle\langle u_j|$

et bien $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$

$|u_i\rangle\langle u_i|u_j\rangle\langle u_j| = 0$.

et aussi $P_i^2 = |u_i\rangle\overbrace{\langle u_i|u_i\rangle}^{1}\langle u_i| = |u_i\rangle\langle u_i| = P_i$.

Enoncé les principes de la physique quantique.

(Notes paragraphe 3.2 avec plus de détails).

4 principes :

(a) syst isolé est décrit par vect $\in$ esp d'Hilbert.

(b) vect appelé "vect d'état" ou bien "état" évolue ds le temps de façon unitaire.

(c) opération de mesure ou observation de l'état quant.
↳ projection aléatoire.
règle de Born.

(d) permet de composer des syst quantiques (produit tensoriel).

<u>Principe (a)</u> L'état d'un système isolé de son environnement est complètement décrit par un vecteur de l'espace d'Hilbert : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ et avec le qualificatif $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ (vecteur unité).

<u>Exemple</u> Le bit quantique $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

vect d'états $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$.

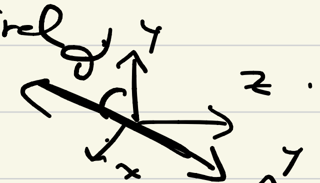
$$|\psi\rangle = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{|0\rangle} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{|1\rangle} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

vect de la base computationelle.

physiquement une réalisation du bit quantique est la <u>POLARISATION DU PHOTON</u>

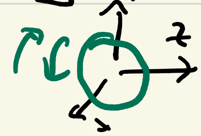
$$(\cos\vartheta)|0\rangle + e^{i\varphi}(\sin\vartheta)|1\rangle = |\vartheta, \varphi\rangle.$$

état de POL elliptique général



POL linéaire $|\vartheta\rangle = (\cos\vartheta)\underbrace{|0\rangle}_{|x\rangle} + (\sin\vartheta)\underbrace{|1\rangle}_{|y\rangle}$

POL circulaire $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm i|y\rangle)$



Parenthèse:

(Pour une particule dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

esp. des fonctions $\psi(\vec{r})$ t.q. $\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}\, |\psi(\vec{r})|^2}_{\|\psi\|^2 =: \langle\psi|\psi\rangle} < \infty$

l'état doit satisfaire
$\|\psi\| = 1$.)

Principe (b): Evolution temporelle des états.

Si $|\psi\rangle$ est l'état du syst (isolé) à l'instant $t=0$

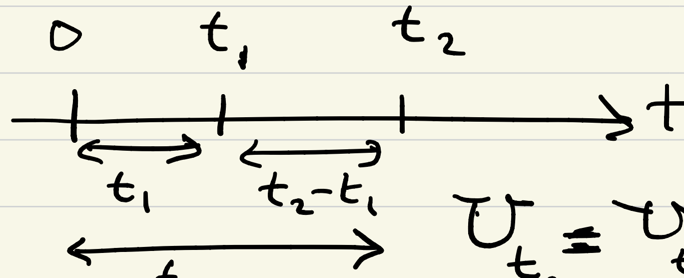
le vect d'état à l'instant $t>0$ est donné par

$U_t|\psi\rangle$ où U_t est une $\boxed{\text{matrice unitaire}}$

Déf de matrice unitaire: $U_t^{T,*}U_t = U_t U_t^{T,*} = \underbrace{I}_{d\times d}$.

(Remarque: U_t matrice $d\times d$ si $\dim\mathcal{H} = d$).

Propriété



$U_{t_2} = U_{t_2-t_1}\cdot U_{t_1}$

"Loi de groupe".

Exemples :

(i) Polarisation du photon :

$$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{ E_0 \begin{pmatrix} (\cos\vartheta)\, e^{i\delta_x} \\ (\sin\vartheta)\, e^{i\delta_y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \right\} \qquad e^{-i\omega t}$$

ch de l'onde plane

$\Downarrow$ suggère que l'état du photon : $\delta_x = 0$ et $\delta_y = \varphi$.

e^{ikz} fct d'onde

$\updownarrow$

$$\underbrace{e^{-i\omega t}}\,.\, |k\rangle \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ (\sin\vartheta)\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}}_{|\vartheta,\varphi\rangle}.$$

ket décrit le deg de liberté orbital.

$\downarrow$ décrit l'évolution temporelle de l'état du photon (associé à une onde plane de fréquence $2\pi\nu = \omega$ et $k = \frac{\omega}{c}$.).

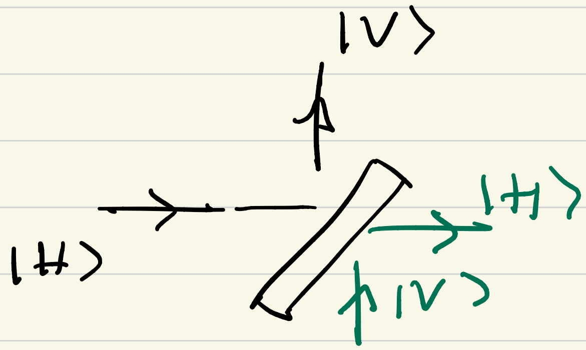
$\downarrow$

Ce facteur $e^{-i\omega t}$ en fait est un exemple très simple de matrice unitaire 1×1 : $\boxed{U_t = e^{-i\omega t}}$

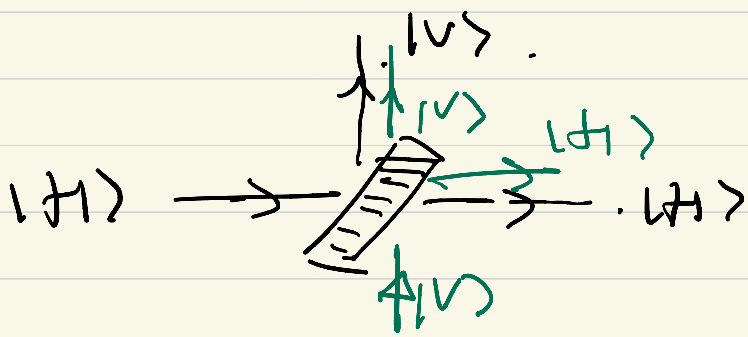
$$(e^{-i\omega t})^* e^{-i\omega t} = e^{i\omega t} e^{-i\omega t} = 1 \quad // \quad U_t^{T,*} U_t = I.$$

(ii) Mirroirs et miroirs semi-transparents dans les interféromètres (exercice).

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ modèle simple pour l'état orbital du photon $\{ |H\rangle$ et $|V\rangle$ avec $\langle H|V\rangle = 0$, $\langle H|H\rangle = \langle V|V\rangle = 1 \}$.



Mirroir réfléchissant



semi-transparents.

Mirroirs décrits par matrices unitaires qui transforment l'état entrant ou incident sur le miroir :

Réfléchissant

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |H\rangle \to |V\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |V\rangle \to |H\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{U = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$$

$U|H\rangle = |V\rangle$
$U|V\rangle = |H\rangle$.

$U^{T,*} = U$ et $U^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

à vérifier exercice

Semi-transparent

$$|H\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$$
$$|V\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$$

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$$

à vérifier unitaire.

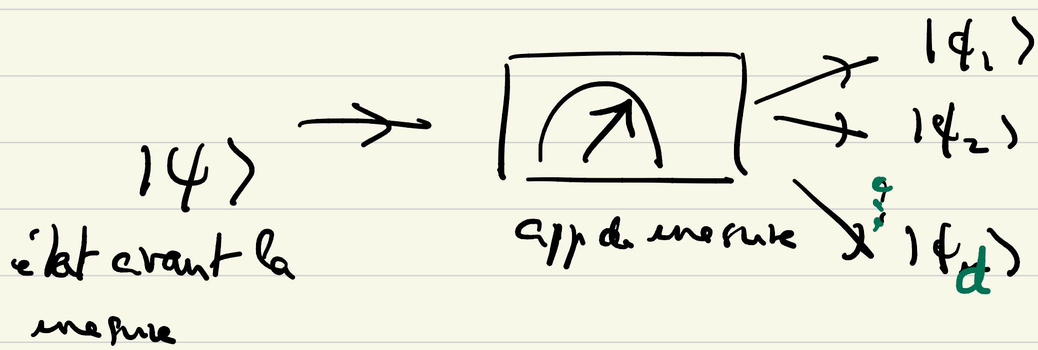
Principe (C) : Principe de la Mesure et règle de Born.

- syst préparé dans l'état quantique $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- on fait une mesure / observation avec un appareil de mesure

→ L'appareil de mesure peut être assimilé à une base orthonormée de $\mathcal{H}$ (base ortho $\leftrightarrow$ app de mesure).

$$\{ |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots, |\phi_d\rangle \} \qquad \dim \mathcal{H} = d .$$

→ La mesure de l'état projette cet état de façon aléatoire sur un des états de base $|\phi_i\rangle$.



l'état après la Mesure vaut un des $|\phi_i\rangle$.

comme un jeu de dés

→ Statistique des résultats de mesures satisfait à la règle de Born :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Prob}(|\phi_i\rangle) = |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2 \\ \mathrm{Prob}(|\psi\rangle \to |\phi_i\rangle). \end{array}}$$

Longueur de la projection de $|\psi\rangle$ sur $|\phi_i\rangle$.

Remarque :

base $\{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_d\rangle\}$.

$\Longleftrightarrow$

ens de projecteurs orthogonaux :

$$\{P_1 = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| , \dots, P_d = |\phi_d\rangle\langle\phi_d|\}$$

* Résultat pour l'état sortant après la mesure :

$|\psi\rangle \longrightarrow$  $\longrightarrow |\phi_i\rangle$

$$|\phi_i\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\|P_i|\psi\rangle\|} \propto P_i|\psi\rangle = |\phi_i\rangle\cancel{\langle\phi_i|\psi\rangle}$$

proportionnelle

- On pense à la mesure comme à une proj aléatoire sur un des vect de base.

* $$\mathrm{Prob}(|\psi\rangle \to |\phi_i\rangle) = |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2 = \overline{\langle\phi_i|\psi\rangle}\langle\phi_i|\psi\rangle$$
$$= \langle\psi|\underbrace{\phi_i\rangle\langle\phi_i}|\psi\rangle$$
$$= \langle\psi|P_i|\psi\rangle = \langle\psi|P_i^2|\psi\rangle$$

formules souvent pratiques.

<u>Remarque</u> : On vérifie que

$$\sum_{i=1}^{d} \underbrace{\text{Prob}(|\psi\rangle \to |\phi_i\rangle)} = 1$$

En effet :

$$\sum_{i=1}^{d} |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{d} \langle \psi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \psi \rangle .$$

$$= \langle \psi | \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \right)}_{I_{d\times d}} |\psi\rangle .$$

$$= \langle \psi | \psi \rangle = 1$$ pour un état quant

(voir principe (a)).

<u>Autre façon de raisonner</u> : . $\langle \phi_i | \psi \rangle$ = composante de $|\psi\rangle$ le long de $|\phi_i\rangle$.

. somme des carrés des composantes vaut $\| |\psi\rangle \|^2 = 1$.

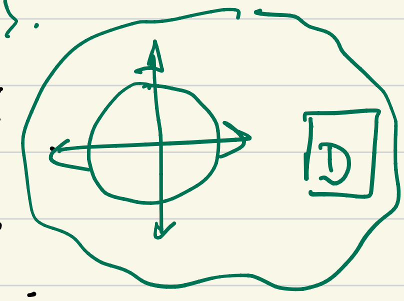
Exemple.

$|\theta = \frac{\pi}{4}\rangle$

état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$.

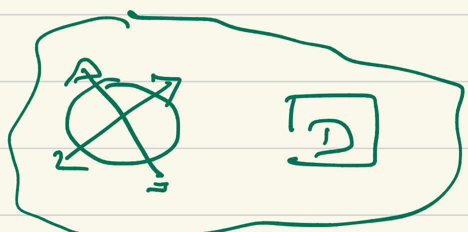
$|x\rangle$ $\quad$ $|y\rangle$.

<u>Mesure dans la base</u> $\{\,|0\rangle \,;\, |1\rangle\,\}$



$\{\,|0\rangle\langle 0| \,;\, |1\rangle\langle 1|\,\}$.

$$\begin{cases} \text{Prob}(0) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = \left|\langle 0|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + |1\rangle\right)\right|^2 \\ \qquad = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0}\right|^2 \\ \qquad = \frac{1}{2} \checkmark \\ \text{Prob}(1) = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \checkmark \end{cases}$$



<u>Mesure dans la base</u> $\left\{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)} \text{ et } \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)}\right\}$.

$\text{Prob}(\text{premier état}) = |\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1.$ ✓

$\text{Prob}(\text{deuxième état}) = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + |1\rangle\right)\right|^2$

$= \frac{1}{2}\left|\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + \underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1}\right|^2$

$= 0$ ✓

Principe (d) : Composition des systèmes quantiques

Si un syst est formé de plusieurs systs A, B, C, ...
et chacun pris isolément est décrit par $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C, \ldots$
alors le syst total est décrit par des vecteurs dans

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C \otimes \cdots$$

$$\dim \mathcal{H}_{tot} = d_A d_B d_C \,.$$

et les principes (a), (b), (c) s'appliquent.

Exemple : N bits quantiques chacun décrit par $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. L'ensemble des N bits quantiques possède

$$\mathcal{H}_{tot} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ fois}}$$

$$\dim \mathcal{H}_{tot} = 2^N \leftarrow \text{énorme dimension si } N \text{ est grand.}$$

Base computationnelle de l'esp des N bits quantiques :

$$\{ |b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \otimes \cdots \otimes |b_N\rangle \equiv |b_1 b_2 \cdots b_N\rangle \} .$$

$b_i = 0, 1$

toutes les suites binaires possibles
2^N suites $\rightarrow$ 2^N vect de base.

État général de N bits quantiques :

$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\substack{2^N \\ \text{composantes} \\ \text{en} \\ \text{colonne.}}} = \underbrace{\sum_{b_1 \cdots b_N \in \{0,1\}^N}}_{2^N \text{ termes dans la somme}} \underbrace{C_{b_1 \cdots b_N}}_{\in \ \mathbb{C}} \underbrace{|b_1 \cdots b_N\rangle}_{\substack{\text{vecteur avec} \\ 2^N \text{ composantes.}}}$$

Cas particulier de deux bits quantiques : 4 composantes.

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Principe (d) : Composition de systèmes quantiques.

Systs A, B, C chacun décrit par un esp d'Hilbert $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_C$ le syst $A \cup B \cup C$ est décrit par un vecteur dans l'esp d'Hilbert

$$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C .$$

et les principes précédents s'appliquent $\blacksquare$

Remarques

- $\dim \mathcal{H}_{tot} = d_A \, d_B \, d_C$. produit des dimensions.

- N bits quantiques. Chaque bit quantique $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

$$\mathcal{H}_{tot} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{\text{espace avec } 2^N \text{ dimensions.}} \equiv (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$$

vecteurs de cet esp ou bien les "kets" possède 2^N composantes.

→ Notation de Dirac bien pratique !

. <u>la base computationnelle</u> : produit tensoriel des bases $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ pour chaque <u>qubit</u> (bit quantique).

$$|b_i\rangle = |0\rangle \text{ ou } |1\rangle \text{ pour le bit } i.$$

$$i = 1 \dots N.$$

$\mathcal{H}_{tot} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. possède la base orthonormée :

$$\{ |b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \otimes \dots \otimes |b_N\rangle = |b_1 b_2 \dots b_N\rangle \}.$$

2^N suites binaires ou 2^N vects de base.

$$\cdot\ |\Psi\rangle = \sum_{(b_1 \dots b_N) \in \{0,1\}^N} \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{C_{b_1 \dots b_N}}} \underbrace{|b_1 \dots b_N\rangle}$$

Ket général pour N bits quantiques

(colonne avec 2^N composantes ou une comp est non nulle et vaut 1.)

$$\text{avec } \langle\psi|\psi\rangle = \sum_{(b_1 \dots b_N) \in \{0,1\}^N} |C_{b_1 \dots b_N}|^2 = 1.$$

Notion d'état produit et d'état intriqué

(intrication est très importante et on reviendra dessus avec des applications.).

Syst Bipartite $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. :

(p. ex 2 bits quantiques)

Par déf un état produit de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ est un état

$|\psi\rangle$ t.q $\exists\, |\phi\rangle_A$ et $|\phi_B\rangle$ t.q

$$|\phi\rangle_A \in \mathcal{H}_A \qquad |\phi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$$

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle.$$

Par déf un état est dit INTRIQUÉ si ce n'est pas un état produit.

Exemple :

- $|0\rangle \otimes |0\rangle \qquad |0\rangle \otimes |1\rangle \qquad |1\rangle \otimes |0\rangle \qquad |1\rangle \otimes |1\rangle$

états produits !

- $$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |10\rangle\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)}_{} \otimes \underbrace{|0\rangle}_{}$$

$|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle$

état produit !

- $$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$ état produit

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right).$$

- Etats de Bell sont intriqués ! → FORME DE CORRELATION ENTRE QUBITS

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

Propriété importante :

Si un état est produit on ne peut pas l'intriquer en faisant des opérations unitaires locales sur chaque partie :

$$|\psi\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ U_A \\ \text{Lune}}}{|\phi_A\rangle} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ U_B \\ \text{terre}}}{|\phi_B\rangle}.$$

$$U_A \otimes U_B \, |\psi\rangle = \underbrace{U_A|\phi_A\rangle \otimes U_B|\phi_B\rangle}_{\text{reste un état produit.}}.$$

Pour intriquer un état il faut amener les deux parties ensemble et faire une opération globale sur A et B.