EPFL Automne 2022

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 2

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

1 Derniere chance de faire quelques exercices de la serie precedente

Exercice 1. Montrer qu'un groupe fini $(G, \star, e_G, \bullet^{-1})$ de cardinal $|G| = 2$ est toujours commutatif.

Exercice 2. Dans un exercice de la serie precedente, on a defini pour $q \geqslant 1$ un entier non nul, l'ensemble des classes de congruences modulo q

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{a \,(\mathrm{mod}\, q),\ a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{Z})$$

avec

$$a \,(\mathrm{mod}\, q) := a + q\mathbb{Z} = \{a + q.k,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

On a egalement defini l'application

$$\pi_q : a \in \mathbb{Z} \mapsto a \,(\mathrm{mod}\, q) \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

D'autre part, pour $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, on a pose

$$A \boxplus B := \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}).$$

On definit egalement

$$\boxminus A := \{-a,\ a \in A\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}),$$

l'ensemble des opposes des elements de A.

1. Que vaut $\pi_q^{(-1)}(\{a \pmod q\}) \subset \mathbb{Z}$?
2. Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$?
3. Calculer $\boxminus(a \pmod q)$?
4. Montrer que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \boxplus, 0 \pmod q, \boxminus)$ forme un groupe commutatif.
5. Montrer que l'application $\pi_q : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes.

Exercice 3. Soit $G = [0, 1[$ et $\oplus : G \times G \mapsto \mathbb{R}$ la loi de composition definie par

$$x \oplus x' := \begin{cases} x + x' & \text{si } x + x' < 1 \\ x + x' - 1 & \text{si } x + x' \geqslant 1 \end{cases}.$$

Montrer que $\oplus$ est a valeurs dans G et trouver un element neutre $0_G \in G$ et une application inversion $\ominus : G \mapsto G$ telles que

$$(G, \oplus, 0_G, \ominus)$$

forme un groupe commutatif.

2 Nouveaux exercices

Exercice 4 (Se reporter a la section 2.2.1 du cours)**.** Soit $n \geqslant 1$ un entier non-nul et

$$\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, 2, \cdots, n\})$$

le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ (ou groupe des permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$). C'est un groupe fini de $n! = 1.2. \cdots .n$ elements.

On peut representer une permutation par un tableau a deux lignes et n colonnes

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'identite est ainsi codee par

$$\mathrm{Id}_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

alors que

$$c_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

est la permutation (dite cylique) qui envoie

$$1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3, \cdots, n \mapsto n-1,\ n \mapsto 1$$

1. Representer tous les elements de $\mathfrak{S}_2$ et montrer que ce groupe est commutatif.
2. Representer ainsi tous les elements de $\mathfrak{S}_3$ et montrer que ce groupe n'est pas commutatif.
3. Pour $n = 4$, on considere

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

les permutations qui envoient respectivement

$$\theta : 1 \mapsto 4, \ 2 \mapsto 1, \ 3 \mapsto 3, \ 4 \mapsto 2, \ \tau : 1 \mapsto 1, \ 2 \mapsto 4, \ 3 \mapsto 3, \ 4 \mapsto 2.$$

Calculer

$$\theta \circ \tau, \tau \circ \theta, \ \theta^2, \ \theta^3, \ \theta^n, \ \tau^n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

4. On note

$$\mathfrak{S}_{4,3} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4, \ \sigma(3) = 3\}$$

l'ensemble des bijection qui envoie 3 sur 3 ; on appelle cet ensemble le stabilisateur de 3. Donner tous les elements de $\mathfrak{S}_{4,3}$. Montrer que $\mathfrak{S}_{4,3}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$. Est ce que ce groupe est engendre par θ et τ ?

Exercice 5. Soit le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On rappelle que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $q.\mathbb{Z}$ pour $q \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que le groupe engendre par 2 et 3 vaut $\langle 2, 3 \rangle = \mathbb{Z}$. (on montrera que ce sous-groupe contient 1).
2. Meme question pour 3 et 73.
3. Montrer (en utilisant Bezout) que pour $m, n \in \mathbb{Z}$, le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendre par m et n est

$$\langle m, n \rangle = pgcd(m, n).\mathbb{Z}.$$

Exercice 6 ($\star$)**.** (Groupes produit) Soient $(G, \star)$ et $(H, *)$ deux groupes. On considere le produit cartesien $G \times H$ muni de la loi de composition interne :

$$(g, h) \boxtimes (g', h') := (g \star g', h * h').$$

1. Trouver un element neutre $e_{G \times H}$ et une inversion $(\bullet, \bullet)^{-1}$ de sorte que

$$(G \times H, \boxtimes, e_{G \times H}, (\bullet, \bullet)^{-1})$$

forme un groupe.
2. On suppose dans cette question que $G = H$. Montrer que la diagonale $\Delta G = \{(g, g), \ g \in G\}$ est un sous-groupe de $G \times G$.
3. Soient $G' \subset G$ et $H' \subset H$ des sous-groupes. Montrer que $G' \times H'$ est un sous-groupe de $G \times H$.

4. Est ce que la reciproque est vraie ? C'est a dire est ce que tout sous-groupe de $G \times H$ est de la forme $G' \times H'$?
5. On considere les applications (de projection)

$$\pi_G : \begin{array}{ccc} G \times H & \mapsto & G \\ (g,h) & \mapsto & g \end{array}, \quad \pi_H : \begin{array}{ccc} G \times H & \mapsto & H \\ (g,h) & \mapsto & h \end{array}.$$

   Est ce que ce sont des morphismes de groupes ?
6. On suppose que $G = H$. est ce que l'application

$$\star : \begin{array}{ccc} G \times G & \mapsto & G \\ (g,g') & \mapsto & g \star g' \end{array}$$

   est un morphisme de groupes en general ? Sinon donner une condition suffisante pour que cela en soit un.

Exercice 7. Soit le groupe produit $(\mathbb{Z}^2, +)$ forme des paires d'entiers et equipe de l'addition provenant de $(\mathbb{Z}, +)$:

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x,y),\ x,y \in \mathbb{Z}\}$$

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y').$$

(comme la notation le suggere on utilisera -sauf pour la deuxieme question et preuve du Lemme ci-dessous- ici la notation additive/multiple : en particulier on notera pour $n \geqslant 1$ un entier

$$n.(x,y) = (n.x, n.y) = (x,y) + (x,y) + \cdots + (x,y) \ n \text{ fois.})$$

1. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}^2$ est engendre par les elements $(1,0)$ et $(0,1)$:

$$\langle \{(1,0),(0,1)\} \rangle = \mathbb{Z}^2.$$

2. Soit $(H, \star)$ un autre groupe (note multiplicativement) et $\varphi : \mathbb{Z}^2 \mapsto H$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ on a

$$\varphi((x,y)) = h_1^x \star h_2^y$$

   avec $h_1 = \varphi((1,0)),\ h_2 = \varphi((0,1))$.
3. Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ deux paires d'entiers tels que

$$ad - bc = \pm 1.$$

   Montrer que ces deux elements engendrent $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{Z}^2 = \langle \{(a,b),(c,d)\} \rangle.$$

On pourra commencer par remarquer que

$$\langle\{(a,b),(c,d)\}\rangle = \{m.(a,b)+n.(c,d),\ m,n\in\mathbb{Z}\} =: \mathbb{Z}.(a,b)+\mathbb{Z}(c,d),$$

montrer que

$$(1,0),(0,1)\in\langle\{(a,b),(c,d)\}\rangle$$

et utiliser le Lemme suivant (qu'on demontrera) :

Lemme 1. *Soit $(G,*)$ un groupe et $A\subset G$ un sous-ensemble. On suppose que $\langle A\rangle = G$ (ie. le groupe G est engendre par A). Soit $B\subset G$ un autre sous-ensemble. On a alors*

$$A\subset\langle B\rangle \Longrightarrow G=\langle B\rangle$$

(si le sous-groupe engendre par B contient A alors c'est G tout entier).

Exercice 8 (Groupes de fonctions)**.** Soit X un ensemble et $(G,\star)$ un groupe. Soit

$$\mathcal{F}(X,G)=\{f:X\mapsto G\}$$

l'ensemble des fonctions de X a valeurs dans G (les applications de X vers G).

On muni $\mathcal{F}(X,G)$ de la loi de composition interne suivante : etant donne $f_1,f_2\in\mathcal{F}(X,G)$ on defini la fonction $f_1\star f_2$ par

$$\forall x\in X,\ f_1\star f_2(x) := f_1(x)\star f_2(x).$$

(ici on abuse les notations en notant la loi de composition sur $\mathcal{F}(X,G)$ de la meme maniere que celle sur G).

1. Trouver un element neutre $e_{\mathcal{F}(X,G)}$ et une inversion $\bullet^{-1}$ de sorte que $(\mathcal{F}(X,G),\star,e_{\mathcal{F}(X,G)},\bullet^{-1})$ forme un groupe.
2. Soit $U\subset G$ un sous-ensemble de G. Donner une condition necessaire et suffisante pour que le sous-ensemble des fonctions a valeurs dans U

   $$\mathcal{F}(X,U)\subset\mathcal{F}(X,G)$$

   forme un sous-groupe de $\mathcal{F}(X,G)$.

3 Exercices supplementaires qui seront repris et completes la semaine suivante

Exercice 9. (Le centre d'un groupe) Soit $(G,.)$ un groupe et

$$Z(G)=\{z\in G,\ \text{pour tout } g\in G,\ z.g=g.z\}.$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe commutatif de G. On l'appelle le centre de G.

Exercice 10 (Groupe des commutateurs)**.** Soit $(G, .)$ un groupe. Le commutateur de deux elements $g, h \in G$ est l'element

$$[g, h] = g.h.g^{-1}.h^{-1}.$$

Le groupe *derive* de G est par definition le sous-groupe engendre par les commutateurs

$$D(G) = \langle \{[g, h],\ g, h \in G\} \rangle.$$

1. Que vaut $[G, G]$ is G est commutatif ?
2. Soit Z un groupe commutatif et

   $$\varphi : G \mapsto Z$$

   un morphisme de groupes. Montrer que

   $$\forall g \in [G, G],\ \varphi(g) = e_Z$$

   (on commencera par calculer la valeur de φ sur un commutateur.
3. Montrer que pour tout $k \in G$, et $g, h \in G$, $k.[g, h].k^{-1} = [k.g.k^{-1}, k.h.k^{-1}]$.