EPFL Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 3

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

1 Morphismes de groupes

Exercice 1. (Equations dans les groupes). Soit $(G, \star)$, $(H, \cdot)$ des groupes et

$$\varphi : G \mapsto H$$

un morphisme et $\ker(\varphi)$ son noyau. Etant donne $h \in H$, on cherche a resoudre l'equation d'inconnue $g \in G$:

$$Eq(\varphi, h) : \qquad \varphi(g) = h.$$

L'ensemble des solutions de cette equation n'est autre que la preimage $\varphi^{(-1)}(\{h\})$...

1. Montrer que
$$\varphi^{(-1)}(\{h\})$$
est ou bien vide ou bien non vide ; dans ce dernier cas montrer qu'il existe $g_0 \in G$ tel que
$$\varphi^{(-1)}(\{h\}) = g_0 \star \ker(\varphi)$$
ou on a note
$$g_0 \star \ker(\varphi) = \{g_0 \star k,\ k \in \ker(\varphi)\}.$$
2. Montrer qu' on a egalement
$$\varphi^{(-1)}(\{h\}) = \ker(\varphi) \star g_0$$
avec
$$\ker(\varphi) \star g_0 = \{k \star g_0,\ k \in \ker(\varphi)\}.$$

Quel est l'ensemble de tous les $g_0 \in G$ ayant les proprietes

$$\varphi^{-1}(\{h\}) = g_0 \star \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{h\}) = \ker(\varphi) \star g_0 \ ?$$

Cela vous rappelle t il quelque chose ? (pensez a "equation avec" et "sans second membre", "solution particuliere", "solution generale" ...)

1.1 Conjugaison

Soit G un groupe et $g \in G$ un element, on rappelle que la conjugaison par g est l'automorphisme de G defini par

$$\mathrm{Ad}_g : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ g' & \mapsto & g.g'.g^{-1}. \end{array}$$

On rappelle qu'un sous groupe $K \subset G$ est distingue (ou normal) si

$$\forall g \in G,\ \mathrm{Ad}_g(K) = K$$

et on le note

$$K \lhd G.$$

On a vu que le noyau $\ker \varphi$ d'un morphisme de groupes $\varphi : G \mapsto H$ est distingue.

Exercice 2. (Le centre d'un groupe) Soit $(G, .)$ un groupe. Le centre de G est l'ensemble des elements de g qui commutent avec tous les elements de G

$$Z(G) = \{z \in G,\ \text{pour tout } g \in G,\ z.g = g.z\}.$$

1. Montrer que
$$Z(G) = \ker \mathrm{Ad}_\bullet$$
ou
$$\mathrm{Ad}_\bullet : G \mapsto \mathrm{Bij}(G)$$
est l'action par conjugaison.
2. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingue de G et qu'il est commutatif.

Exercice 3 (($\star$) sous-groupe des commutateurs)**.** Soit $(G, .)$ un groupe.

1. Soit $D \subset G$ un sous-groupe de G. On suppose que,
$$\forall k \in G,\ \mathrm{Ad}_k(D) \subset D.$$
Montrer que D est distingue dans G.

2. Le commutateur de deux elements $g, h \in G$ est l'element
$$[g, h] := g.h.g^{-1}.h^{-1}.$$
Le groupe derive de G est, par definition, le sous-groupe engendre par les commutateurs de G
$$D(G) = [G, G] = \langle \{[g, h],\ g, h \in G\} \rangle.$$
Que vaut $D(G)$ si G est commutatif ?
3. Montrer que pour tout $k \in G$, et $g, h \in G$, $\mathrm{Ad}_k([g, h]) = [\mathrm{Ad}_k(g), \mathrm{Ad}_k(h)]$.
4. En deduire que $\forall k \in G$, $\mathrm{Ad}_k(D(G)) \subset D(G)$ et puis que $D(G) \lhd G$.
5. Soit $(Z, \odot)$ un groupe *commutatif* et
$$\varphi : G \mapsto Z$$
un morphisme de groupes. Montrer que
$$D(G) \subset \ker(\varphi).$$
Pour cela on commencera par regarder ce qu'il en est des commutateurs.

1.2 Action d'un groupe sur un ensemble

Soit X un ensemble, G un groupe et soit $G \curvearrowright X$ une action a gauche de G sur X. On representera (comme on prefere) cette action, soit sous la forme d'un morphisme
$$\varphi : G \mapsto \mathrm{Bij}(X),$$
soit sous la forme d'une application $\odot : (g, x) \in G \times X \mapsto g \odot x \in X$ verifiant les proprietes convenables.

Exercice 4. Soit $x \in X$, la G-orbite de x est le sous-ensemble
$$G \odot x = \{g \odot x = \varphi(g)(x),\ g \in G\}.$$
On dit que x' est dans la G-orbite de x ssi
$$\text{il existe } g \in G, \text{ tel que } x' = \varphi(g)(x) = g \odot x$$
ou en d'autre termes ssi
$$x' \in \varphi(G)(x) = G \odot x.$$
On note cette relation
$$x' \sim_G x$$

1. Montrer que la relation $x' \sim_G x$ est une relation d'equivalence et que les classes d'equivalence de cette relations sont les G-orbites de X (les sous-ensembles de la forme $G \odot x$ pour $x \in X$). En particulier les differentes G-orbites forment un partition de X
   Ainsi la relation $x' \sim_G x$ peut se dire simplement
   "x et x' sont dans la meme G-orbite".
2. On considere le cas ou $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $G = \mathbb{Z}$ agissant sur X via la permutation de X donnee par
$$\sigma : 1 \to 3,\ 2 \to 7,\ 3 \to 5,\ 4 \to 6,\ 5 \to 1,\ 6 \to 4,\ 7 \to 2$$
   et pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in X$, on pose
$$n._\sigma x := \sigma^n(x).$$
   Trouver la decomposition de X en orbites pour cette action (on notera qu'il suffit de considerer les $n \geqslant 0$) et ecrire les differentes orbites sous la forme
$$\{x_0 = 0._\sigma(x_0), x_1 = 1._\sigma x_0, x_2 = 2._\sigma x_0, \cdots\}.$$

Exercice 5. Pour la notion d'action a droite, la notion suivante est utile

Définition 1. *Soient $(G, \star)$ et $(H, *)$ deux groupes, un anti-morphisme de groupes $\varphi : G \mapsto H$ est une application telle que*
$$\forall g, g' \in G,\ \varphi(g \star g') = \varphi(g') * \varphi(g).$$

1. Soit $\varphi : G \mapsto H$ une application, montrer que les proprietes suivantes sont equivalentes
   (a) φ est un anti-morphisme,
   (b) L'application
$$\varphi \circ \bullet^{-1} : g \in G \mapsto \varphi(g^{-1}) \in H$$
   est un morphisme de groupes,
   (c) L'application
$$\bullet^{-1} \circ \varphi : g \in G \mapsto \varphi(g)^{-1} \in H$$
   est un morphisme de groupes.

En particulier appliquant cette equivalence a une action a droite $\varphi : G \mapsto \mathrm{Bij}(X)$ on obtient la definition equivalente d'action a droite :

Définition 2. *Soit* $(G, \star)$ *un groupe,* X *un ensemble et* $(\mathrm{Bij}(X), \circ)$ *le groupe symetrique de* X *(des bijections de* X *sur lui-meme). Une action a droite de* G *sur* X *est la donnee d'un anti-morphisme de groupes*

$$\varphi : G \mapsto \mathrm{Bij}(X)$$

ie. une application $\varphi : G \mapsto \mathrm{Bij}(X)$ *telle que*

$$\forall g, g' \in G,\ \ \varphi(g \star g') = \varphi(g') \circ \varphi(g).$$

On dit alors que G *agit sur* X *a droite a travers* φ *et on le note* $X \curvearrowleft_{\varphi} G$.

Exercice 6 (Action a droite d'un groupe sur un ensemble)**.** Soit $(G, *)$ un groupe et $\mathrm{Bij}(X)$ le groupe des bijection d'un ensemble X.

1. Montrer que la donnee d'une action a droite $X \curvearrowleft_{\varphi} G$ est equivalente a la donnee d'une application
$$\bullet|\bullet : \begin{array}{ccc} X \times G & \mapsto & X \\ (x, g) & \mapsto & x|g \end{array}$$
verifiant
   (a) trivialite de l'element neutre : $\forall x \in X,\ \ x|e_G = x$,
   (b) associativite : $\forall x \in X,\ \ g, g' \in G,\ \ x|(g \star g') = (x|g)|g'$
   (on voit ainsi que dans une action a droite pour calculer l'action de $g \star g'$ sur x, on fait d'abord "agir" g sur x et ensuite on fait "agir" g' sur le resultat $g|x$ alors que pour une action a gauche c'est g' qui agit en premier et ensuite g agit sur le resultat $g' \odot x$.)
2. Soit $\varphi : G \mapsto \mathrm{Bij}(X)$ une action a droite. On definit le noyau de cette action comme etant la preimage de Id_X :
$$\ker \varphi = \varphi^{(-1)}(\{\mathrm{Id}_X\}) = \{g \in G,\ \ \varphi(g) = \mathrm{Id}_X\}.$$
Montrer que $\ker \varphi$ est un sous-groupe distingue de G (attention φ n'est pas tout a fait un morphisme de groupes !).

Exercice 7. Soit X, Y des ensembles, $\mathcal{F}(X, Y)$ l'espace des fonctions (ie. des applications) de X a valeurs dans (ie. vers) Y ; soit $G \curvearrowright_{\varphi} X$ un groupe agissant sur X a gauche (on ecrit $\varphi(g)(x) = g \odot x$).

1. Montrer que l'application
$$\bullet_{|\bullet} : \begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(X, Y), G) & \mapsto & \mathcal{F}(X, Y) \\ (f, g) & \mapsto & f_{|g} \end{array} : x \mapsto f_{|g}(x) := f(\varphi(g)(x)) = f(g \odot x)$$
defini une action a droite de G sur $\mathcal{F}(X, Y)$.

2. Reciproquement, construire a partir d'une action a droite

$$X \curvearrowleft G : (x, g) \in X \times G \mapsto x|g \in X$$

de G sur X, une action a gauche $(g, f) \mapsto g \odot' f$ de G sur $\mathcal{F}(X, Y)$.

Exercice 8. Soit $(G, .)$ un groupe et $g \in G$, un element ; l'application de translation a gauche par g est l'application

$$t_g : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ g' & \mapsto & g.g' \end{array}.$$

1. On a vu que cela defini une action a gauche

$$t_\bullet : G \mapsto \mathrm{Bij}(G).$$

Montrer que $t_\bullet$ est injective.

Remarque 1.1. Ainsi G est isomorphe a son image

$$t_G \subset \mathrm{Bij}(G)$$

(car $t_\bullet$ est un morphisme injectif qui est tautologiquement surjectif sur son image) par un morphisme de groupe donc isomorphe au sous-groupe image.

Ce dernier est le groupe des translations a gauche de G. On a donc montre que tout groupe G est isomorphe a un sous-groupe d'un groupe de permutations (ici $\mathrm{Bij}(G)$).

2 Premiers exercices sur les anneaux

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif. Soit l'ensemble

$$M_2(A) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in A\}$$

des matrices 2×2 a coefficients dans A. On muni cet ensemble des lois d'addition et de multiplication des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

1. Verifier que $M_2(A)$ est un annea d'element nul la matrice nulle

$$0_{2(A)} = \begin{pmatrix} 0_A & 0_A \\ 0_A & 0_A \end{pmatrix}$$

et d'unite la matrice identite

$$\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1_A & 0_A \\ 0_A & 1_A \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si A possede au moins deux elements distincts alors $M_2(A)$ n'est pas commutatif (on verra d'abord que dans ce cas $0_A \neq 1_A$).
3. A une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(A)$ on associe son determinant

$$\det M = ad - bc \in A.$$

Que vaut $\det(\mathrm{Id}_2)$? Montrer que pour $M, N \in M_2(A)$

$$\det(M.N) = \det(M)\det(N).$$

4. Montrer que si M est inversible alors $\det(M) \in A^\times$ (ie. est inversible).
5. On va montrer la reciproque. On suppose que $\det(M) = ad - bc \in A^\times$ (est inversible) et soit $(ad - bc)^{-1}$ son inverse. Montrer qu'alors

$$M' = \begin{pmatrix} (ad-bc)^{-1}d & -(ad-bc)^{-1}b \\ -(ad-bc)^{-1}c & (ad-bc)^{-1}a \end{pmatrix}$$

est l'inverse de M. On peut donc ecrire $M' = M^{-1}$.

6. On a donc montre que

$$M_2(A)^\times = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(A),\ \det M = ad - bc \in A^\times\}.$$

Montrer que l'application

$$M \in M_2(A)^\times \mapsto \det M \in A^\times$$

est un morphisme de groupes. Que vaut $\det(M^{-1})$? Le verifier par un calcul direct.

Exercice 10. Soit $(A, +, ., 0_A, 1_A)$ un anneau . On a dit qu'un element $a \in A$ est inversible a gauche (resp. a droite) si il existe $b \in A$ (resp. $c \in A$) tel que

$$b.a = 1_A \ (resp.\ a.c = 1_A).$$

On dit que b est un inverse a gauche (resp. c est un inverse a droite)

1. On suppose que a est inversible a gauche ET inversible a droite (avec des inverses a gauche et a droite notes respectivement b et c). Montrer qu'alors

$$b = c$$

de sorte que a est inversible au sens du cours (les inverses a droite et a gauche etant les memes). On a alors vu que l'inverse est uniquement defini.

2. On va maintenant donner un exemple d'un anneau possedant un element inversible a gauche mais qui n'est pas inversible a droite. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions (toutes les fonctions, par seulement les morphismes de groupes) de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Alors avec l'addition et la composition des fonctions, on obtient un anneau
$$(\mathcal{F}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}),+,\circ,\underline{0},\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$$
   (a) On considere la fonction de doublement
$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \mapsto & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & D(n) = 2n \end{array}.$$
   Soit $[\bullet] : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ la fonction partie entiere ($[x]$ est le plus grand entier inferieur ou egal a x). Montrer que la fonction
$$H := [\frac{\bullet}{2}] : n \in \mathbb{Z} \mapsto [\frac{n}{2}] \in \mathbb{Z}$$
   est un inverse a gauche de D

   (b) Montrer que D n'admet pas d'inverse a droite : il n'existe pas de $H' : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ telle que
$$D \circ H' = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}.$$