EPFL Automne 2022

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 4

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle la semaine suivante

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

1 Anneaux

Exercice 0. Faire les differents exercices laisses a votre sagacite durant le cours :

1. $\mathrm{Can}_A : \mathbb{Z} \mapsto A$ est un morphisme d'anneaux
2. stabilite par composition et application reciproque de differents tpes de morphismes.
3. Stabilite des images et preimages de sous-modules par des morphismes

Exercice 1. (ex Exo 9 de la serie 3) Soit A un anneau commutatif. Soit l'ensemble

$$M_2(A) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in A\}$$

des matrices 2×2 a coefficients dans A. On muni cet ensemble des lois d'addition et de multiplication des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

1. Verifier que $M_2(A)$ est un annea d'element nul la matrice nulle

$$0_{2(A)} = \begin{pmatrix} 0_A & 0_A \\ 0_A & 0_A \end{pmatrix}$$

et d'unite la matrice identite

$$\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1_A & 0_A \\ 0_A & 1_A \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si A possede au moins deux elements distincts alors $M_2(A)$ n'est pas commutatif (on verra d'abord que dans ce cas $0_A \neq 1_A$).
3. A une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(A)$ on associe son determinant

$$\det M = ad - bc \in A.$$

   Que vaut $\det(\mathrm{Id}_2)$? Montrer que pour $M, N \in M_2(A)$

$$\det(M.N) = \det(M)\det(N).$$

4. Montrer que si M est inversible alors $\det(M) \in A^\times$ (ie. est inversible).
5. On va montrer la reciproque. On suppose que $\det(M) = ad - bc \in A^\times$ (est inversible) et soit $(ad-bc)^{-1}$ son inverse. Montrer qu'alors

$$M' = \begin{pmatrix} (ad-bc)^{-1}d & -(ad-bc)^{-1}b \\ -(ad-bc)^{-1}c & (ad-bc)^{-1}a \end{pmatrix}$$

   est l'inverse de M. On peut donc ecrire $M' = M^{-1}$.
6. On a donc montre que

$$M_2(A)^\times = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(A),\ \det M = ad - bc \in A^\times\}.$$

   Montrer que l'application

$$M \in M_2(A)^\times \mapsto \det M \in A^\times$$

   est un morphisme de groupes. Que vaut $\det(M^{-1})$? Le verifier par un calcul direct.

Exercice 2. Soit $(A, +, .)$ un anneau, $\mathrm{End}_{Gr}(A)$ l'anneau des endomorphismes du groupe additif $(A, +)$. On a definit pour tout $a \in A$ l'application de A vers A,

$$[\times a] : a' \in A \mapsto [\times a](a') := a.a' \in A$$

1. Montrer que $[\times a]$ un endomorphisme du groupe commutatif $(A, +)$, ie. $[\times a] \in \mathrm{End}_{Gr}(A)$.
2. Montrer que $[\times a]$ n'est pas un morphisme d'anneaux sauf si $a = 0_A$ ou 1_A.

3. Montrer que l'application

$$[\times \bullet] : \begin{array}{ccc} A & \mapsto & \mathrm{End}_{Gr}(A) \\ a & \mapsto & [\times a] \end{array}$$

   est un morphisme d'anneaux.
4. En deduire que l'ensemble $A.\mathrm{Id}_A = \{[\times a],\ a \in A\} \subset \mathrm{End}_{Gr}(A)$ est un sous-anneau de $\mathrm{End}_{Gr}(A)$.
5. Calculer $\ker([\times \bullet])$ et en deuire que A est isomorphe a un sous-anneau de $\mathrm{End}_{Gr}(A)$.

2 Modules sur un anneau

Exercice 3. Soit A un anneau et $(M, +)$ un A-module dont la multiplication par les scalaires de A est notee $\star$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on rappelle que l'on pose

$$n_A = 1_A + \cdots + 1_A \ (n \text{ fois si } n \geqslant 0), n_A = (-1_A) + \cdots + (-1_A) \ (-n \text{ fois si } n < 0)$$

l'image de $n \in \mathbb{Z}$ par le morphisme canonique $\mathrm{Can}_A : \mathbb{Z} \mapsto A$, et pour $m \in M$, on pose

$$n.m = m + \cdots + m \ (n \text{ fois si } n \geqslant 0), = (-m) + \cdots + (-m) \ (-n \text{ fois si } n < 0)$$

(la multiplication qui fait de M un $\mathbb{Z}$-module car c'est un groupe commutatif note additivement)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in M$ on a

$$n_A \star m = n.m.$$

Autrement dit les structures de $\mathbb{Z}$-module et de A-module sur M sont compatibles avec le morphisme canonique.

Exercice 4. On considere le $\mathbb{Z}$-module (muni de l'addition)

$$\mathbb{Z}^3 = \{(x, y, z),\ x, y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$$

   est un sous $\mathbb{Z}$-module non-nul de $\mathbb{Z}^3$.
2. Montrer que l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ x + 2y + 3z = 3x + 2y + z = 0\}$$

   est un sous $\mathbb{Z}$-module non-nul de $\mathbb{Z}^3$. On pourra soit le faire directement soit en montrant que cet ensemble est un noyau.

3 Modules et familles generatrices

Exercice 5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $\Delta = ad - bc = \pm 1 \in \mathbb{Z}^\times$. On a vu (Exercice 7 Serie 2) qu'alors que la paire $\{(a, c), (b, d)\}$ engendre le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}.(a, c) + \mathbb{Z}.(c, d) = \{m.(a, c) + n.(b, d) = (ma + nb, mc + nd),\ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

On considere maintenant le cas ou $\Delta \notin \mathbb{Z}^\times$ et on va montrer que

$$\mathbb{Z}.(a, c) + \mathbb{Z}.(c, d) \neq \mathbb{Z}^2$$

1. On suppose que $\Delta = 0$. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}.(a, c) + \mathbb{Z}.(c, d)$ on a

$$ux + vy = 0.$$

2. Si $\Delta \neq 0$, on montrera que si on avait $\langle (a, c), (b, d)\rangle = \mathbb{Z}^2$ alors $\Delta \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ diviserait a, b, c et d et on en deduira une contradiction (on pourra utiliser les resultats et methodes de l'Exercice 7 Serie 2).

Exercice 6. Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif dont le zero et l'unite sont notes 0 et 1 et le A module

$$A^d = \{(a_1, \cdots, a_d),\ a_i \in A\}.$$

1. Soient $u_1, \cdots, u_d \in A^\times$ des elements inversibles de A. Montrer que la famille suivante est generatrice de A^d

$$\mathscr{B} := \{\mathbf{e}_1 = (u_1, 0, \cdots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, u_2, 0, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_d = (0, 0, \cdots, 0, u_d)\}.$$

   On pourra commencer par montrer que le module engendre $\langle \mathscr{B} \rangle$ contient les elements

$$\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, \cdots, 0), \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, 0, \cdots), \cdots, \mathbf{e}_d^0 = (0, \cdots, 0, 1).$$

2. Montrer que l'ecriture d'un element de A^d comme combinaison lineaire d' elements de $\mathscr{B}$ est unique.

Exercice 7. Soit A un anneau et M un A-module, $X, Y \subset M$ des sous-ensembles et $\langle X \rangle$, $\langle Y \rangle \subset M$ les sous A-modules qu'ils engendrent.

1. Montrer que si $X \subset Y$ alors $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$.
2. Montrer que si $\langle Y \rangle$ contient une famille generatrice de M alors Y est une famille generatrice de M (et donc $\langle Y \rangle = M$).

3. Montrer que
$$\langle X \cap Y\rangle \subset \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle$$
et donner un exemple (pour l'anneau $A = \mathbb{Z}$) d'un module non-nul M tel que $\langle X \cap Y\rangle = \{0_M\}$ et $\langle X\rangle \cap \langle Y\rangle = M$; ceci montre qu'on n'a pas egalite en general dans l'inclusion precedente.

Exercice 8. ($\star$) Soit A un anneau et $L, M \subset N$ des sous A-modules d'un module N. On defini la somme de ces sous-A-modules par
$$L + M := \{l + m,\ l \in L,\ m \in M\} \subset N.$$

1. Montrer que $L + M$ est un sous-module de N et que
$$\langle L \cup M\rangle = L + M.$$

2. Soient X et Y des parties generatrices de L et M respectivement : $L = \langle X\rangle,\ M = \langle Y\rangle$. Montrer que
$$\langle X \cup Y\rangle = L + M.$$

Exercice 9. Soit A un anneau et $\varphi : M \mapsto N$ une application A-lineaire entre A-modules. Soit $\mathscr{B} \subset M$ un famille generatrice de M.

1. Montrer que φ est entierement determinee par sa restriction a la famille $\mathscr{B}$: si φ' est une autre application A-lineaire verifiant
$$\forall m \in \mathscr{B},\ \varphi(m) = \varphi'(m)$$
alors
$$\varphi = \varphi'.$$
On pourra consider l'application $\varphi - \varphi' : m \mapsto \varphi(m) - \varphi'(m)$, remarquer que c'est un morphisme de A-module et noter que $\ker(\varphi - \varphi')$ contient $\mathscr{B}$.
2. On suppose que $A = \mathbb{Z}$, $M = N = \mathbb{Z}^2$ et $\mathscr{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ (on sait que c'est une famille generatrice de $\mathbb{Z}^2$). Montrer qu'il existe une application $\mathbb{Z}$-lineaire $\varphi : \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$ telle que
$$\varphi(1, 1) = (1, 3),\ \varphi(1, 2) = (3, 1)$$
et donner une formule pour $\varphi(m, n),\ m, n \in \mathbb{Z}$ (on pourra commencer par calculer $\varphi(1, 0)$ et $\varphi(0, 1)$)
3. Montrer que $\mathscr{B} = \{(1, 1), (1, 2), (0, 1)\}$ est encore generatrice mais qu'il n'existe pas d'application $\mathbb{Z}$-lineaire $\varphi' : \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$ telle que
$$\varphi'(1, 1) = (1, 3),\ \varphi'(1, 2) = (3, 1),\ \varphi'(1, 0) = (1, -2).$$