EPFL

Information, Calcul et Communication

Reconstruction de signaux

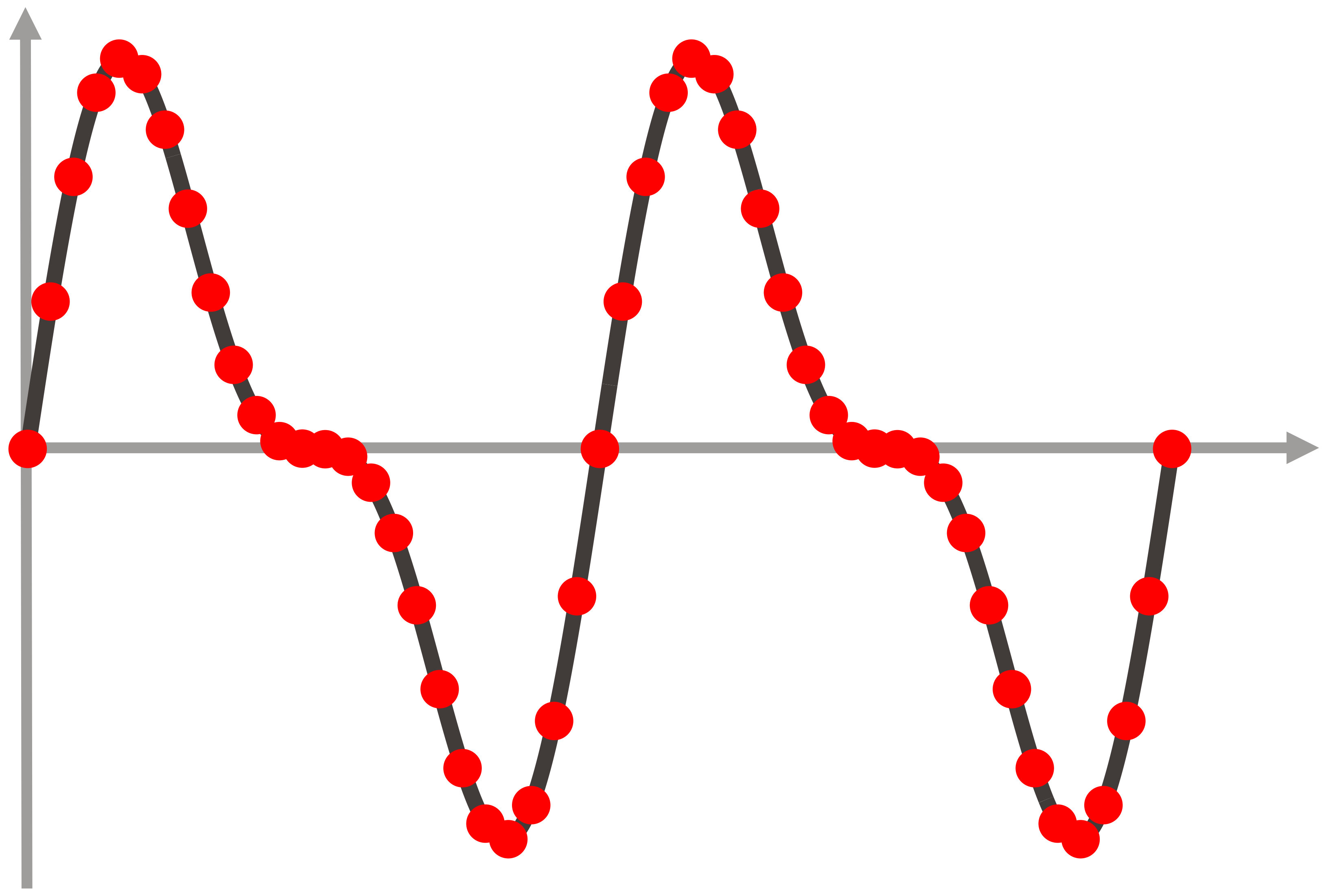
Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

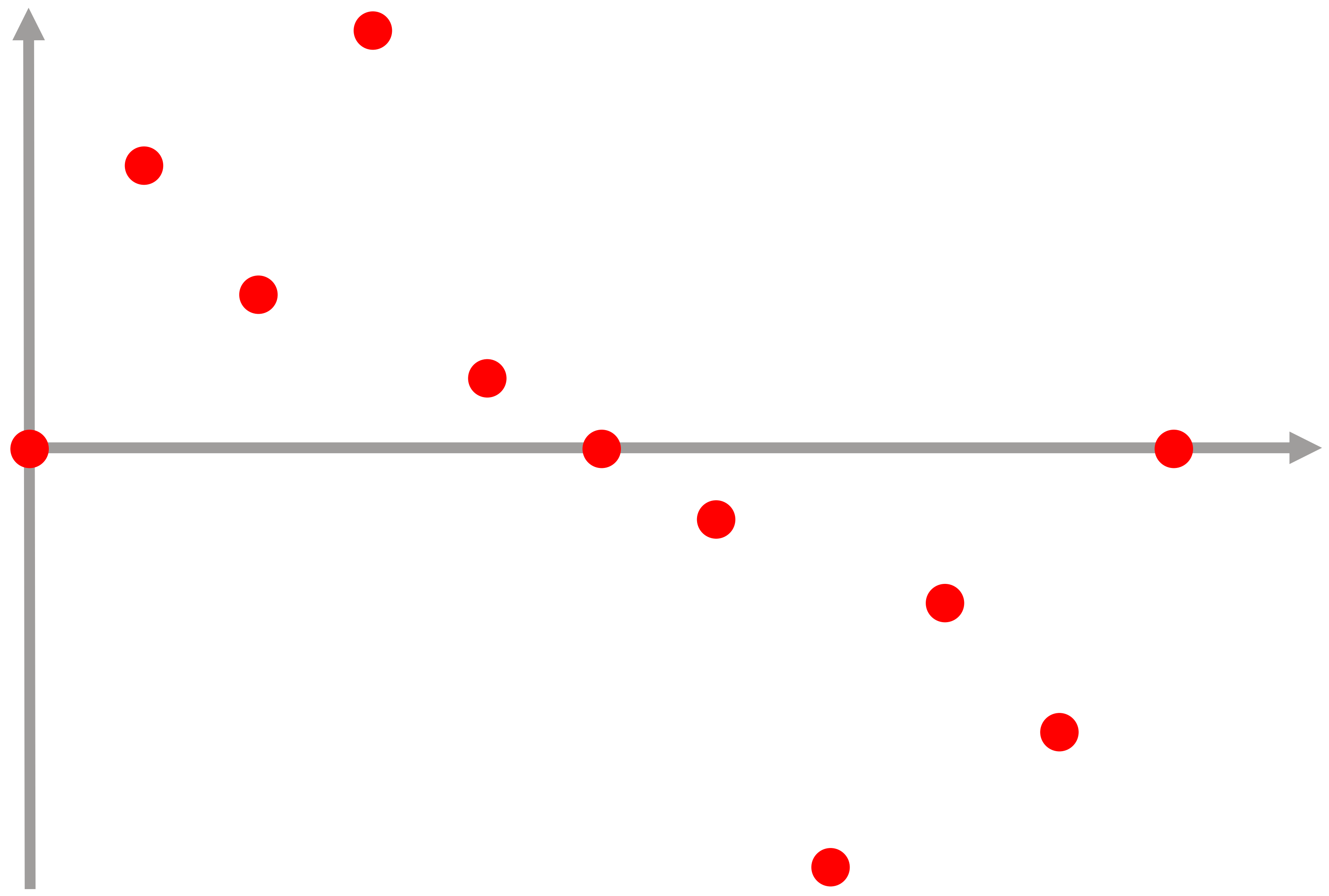
Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$ à partir de sa version échantillonnée $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$?

- Dans certains cas, c'est assez clair...



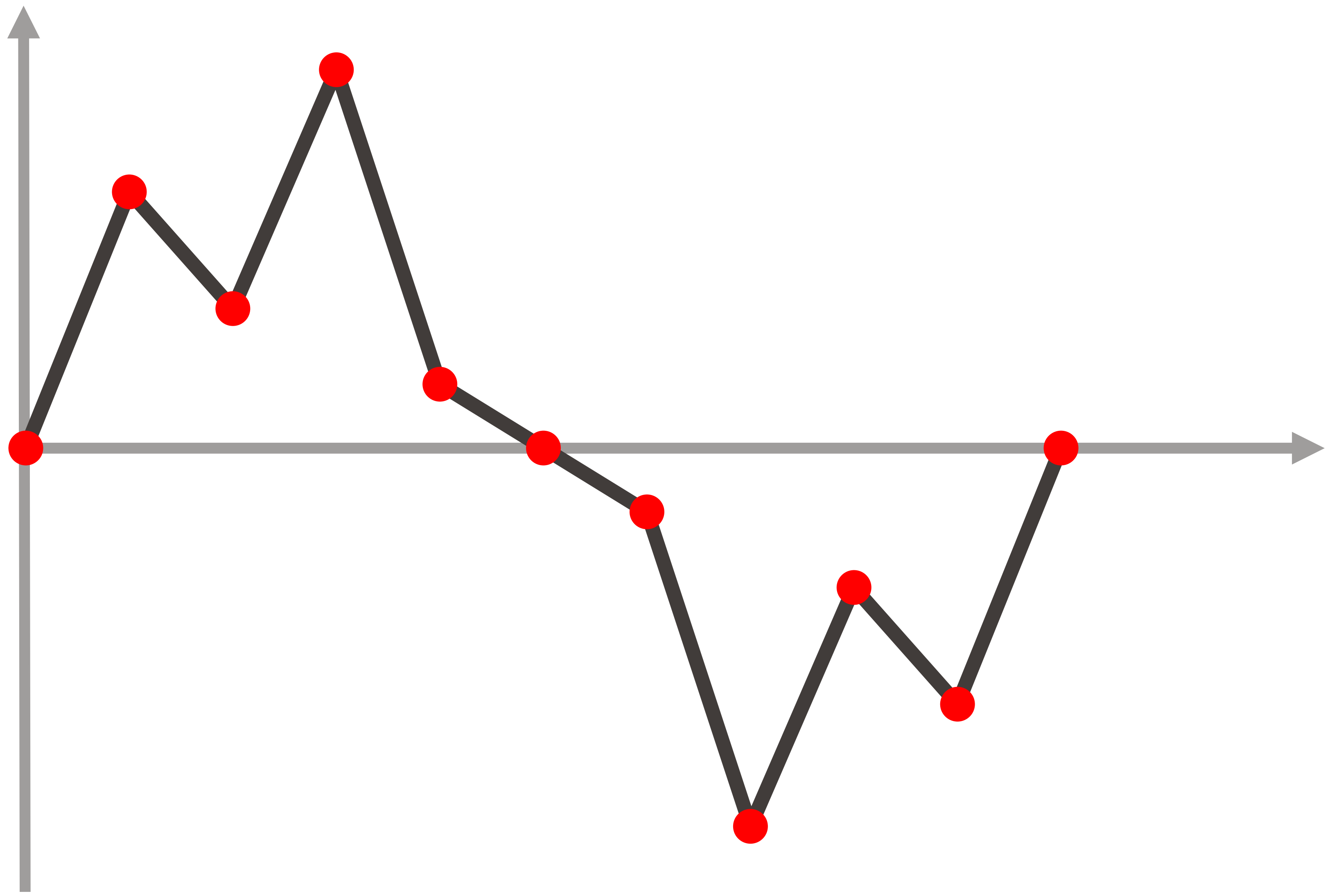
- Dans d'autres, ça l'est un peu moins !



Tentatives d'interpolation

Premières tentatives pour **interpoler** un signal :

1. Relier les points par des **segments de droites** :



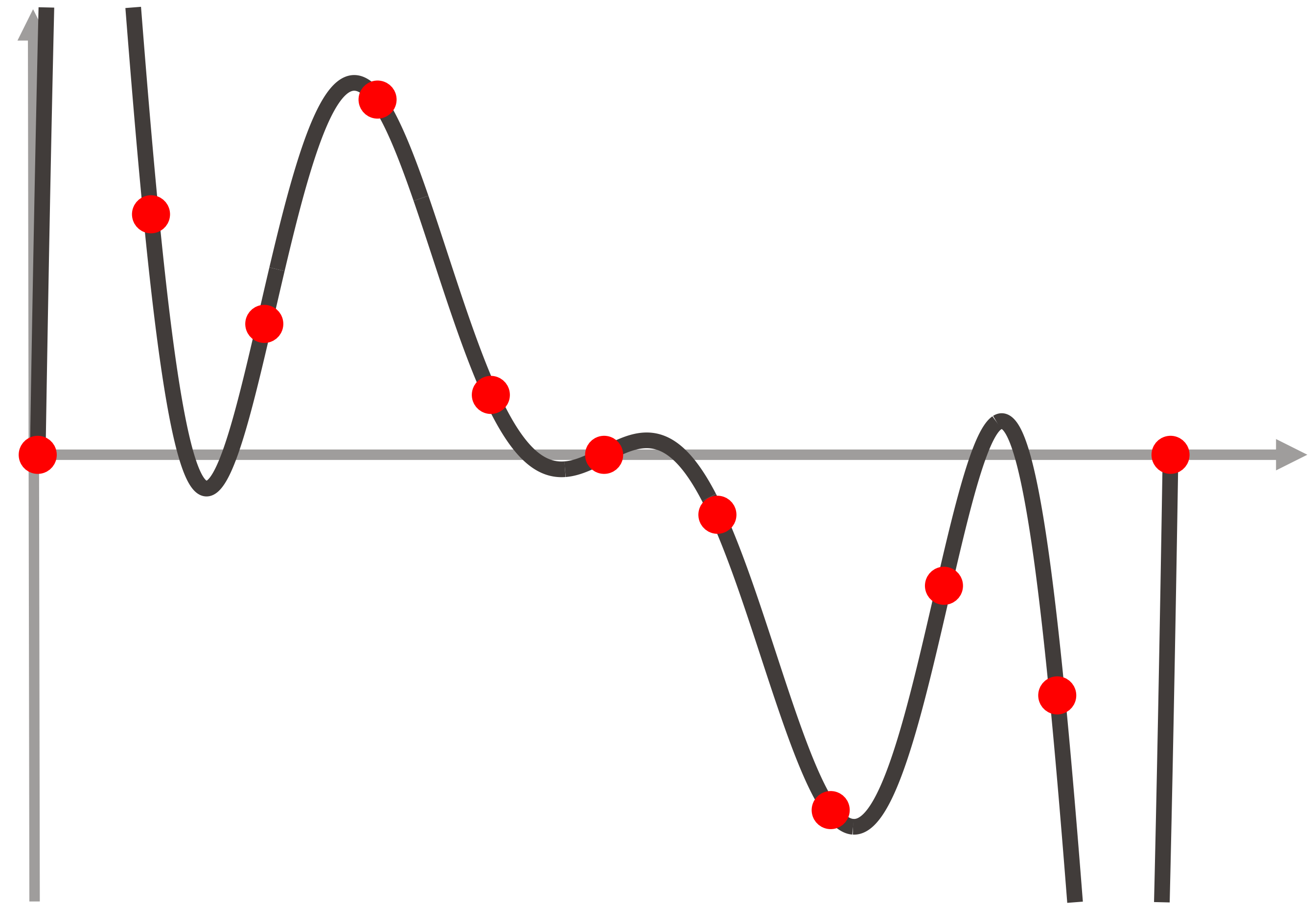
- Un défaut principal : la "courbe" obtenue n'est pas régulière.

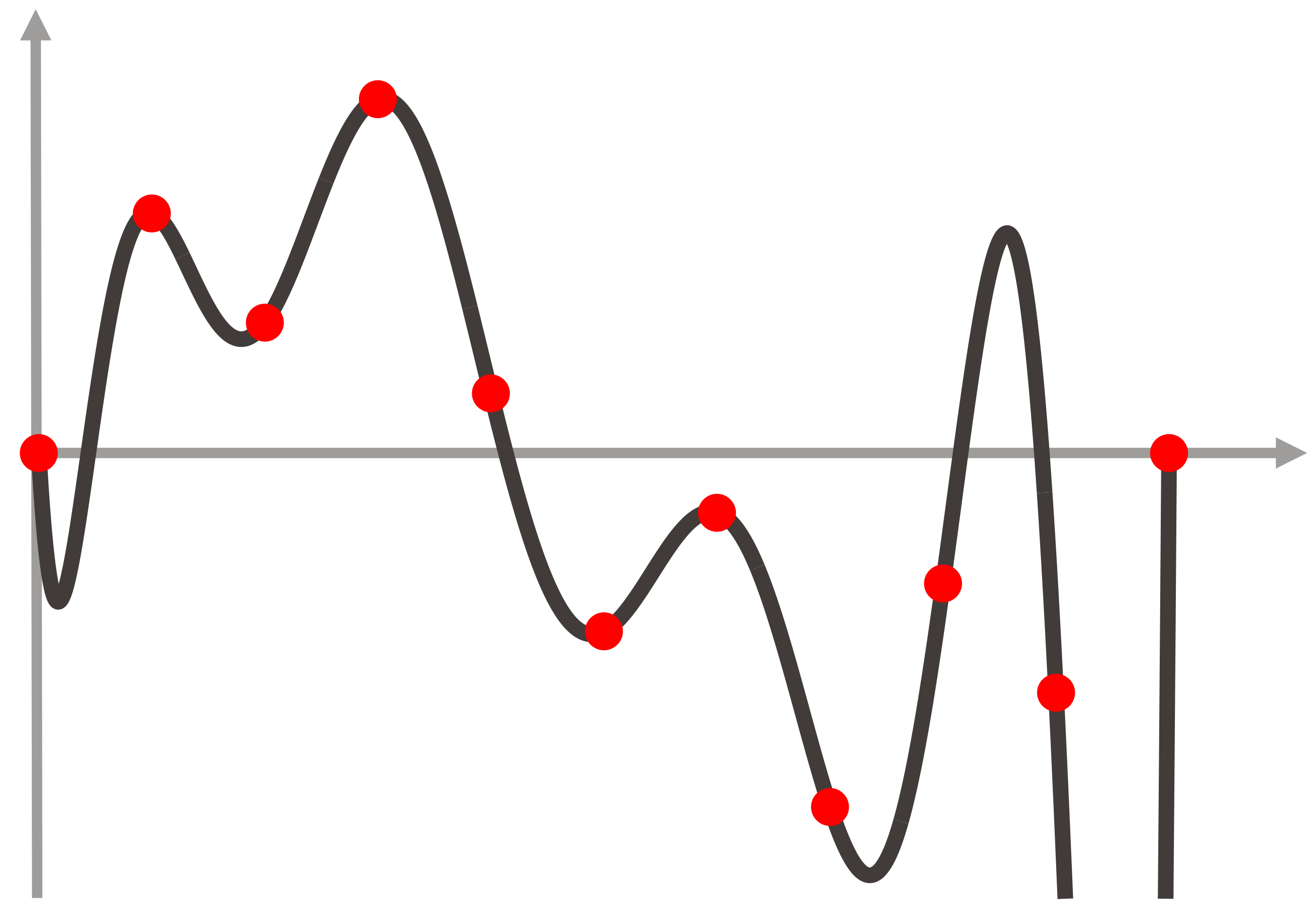
Tentatives d'interpolation

2. Trouver un **polynôme** qui passe par tous les points.

Deux défauts principaux :

- Avec N points, il faut trouver un polynôme de degré $N-1$: la procédure est **compliquée** !
- Elle est également **instable** : si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.





Tentatives d'interpolation

3. De manière générale, une **formule d'interpolation** pour $X(t)$ s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \text{ et } F(k) = 0 \;\forall k \in \mathbb{Z}^*$$ (k entier non nul)

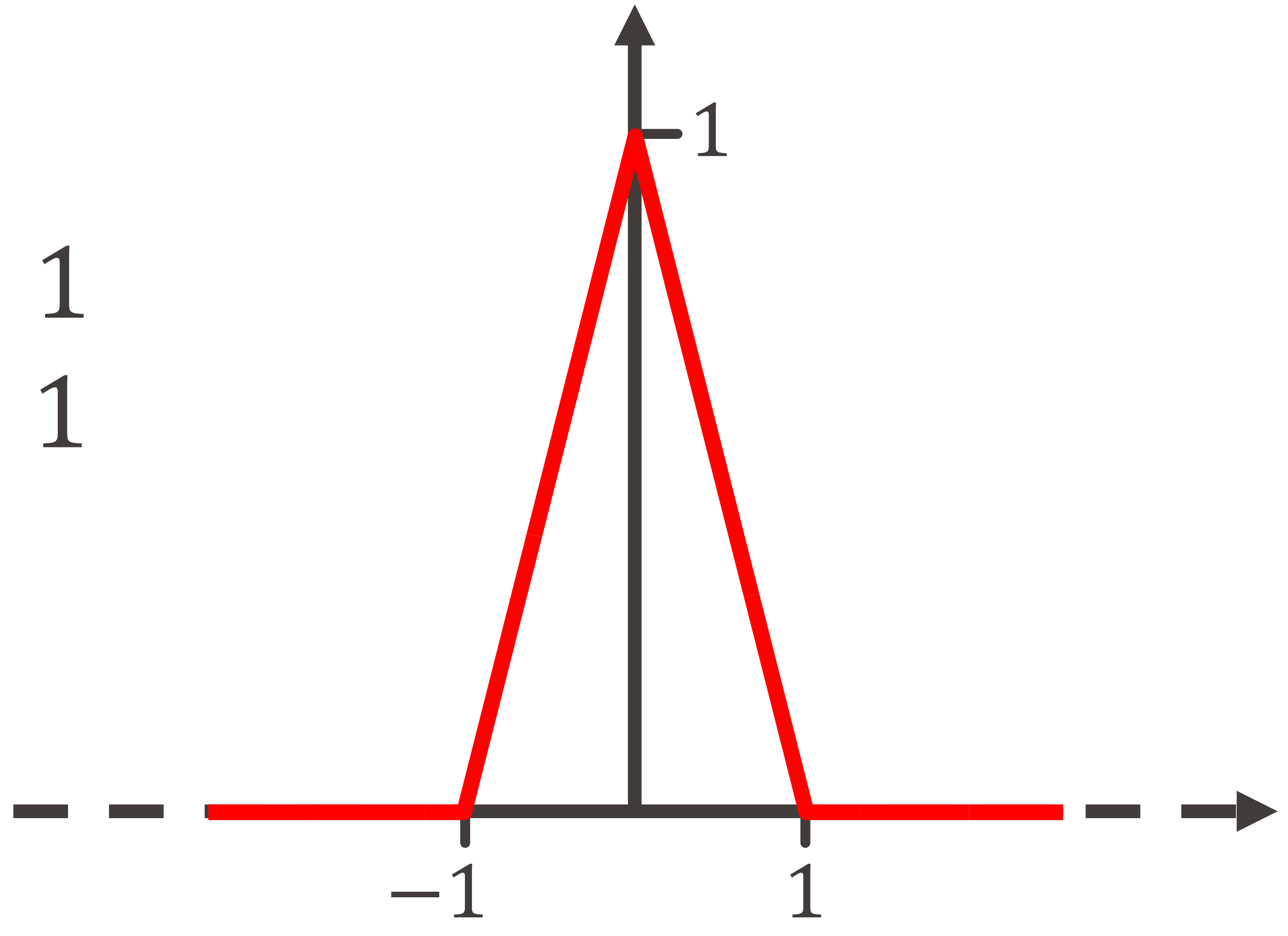
Cette condition implique en particulier que : $X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$

La question est maintenant : quelle fonction F choisir ?

Formule d'interpolation avec tri(t)

- La fonction F qui permet de relier les points par des segments est :

$$F(t) = tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si\ |t| \leq 1 \\ 0 & si\ |t| > 1 \end{cases}$$



$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

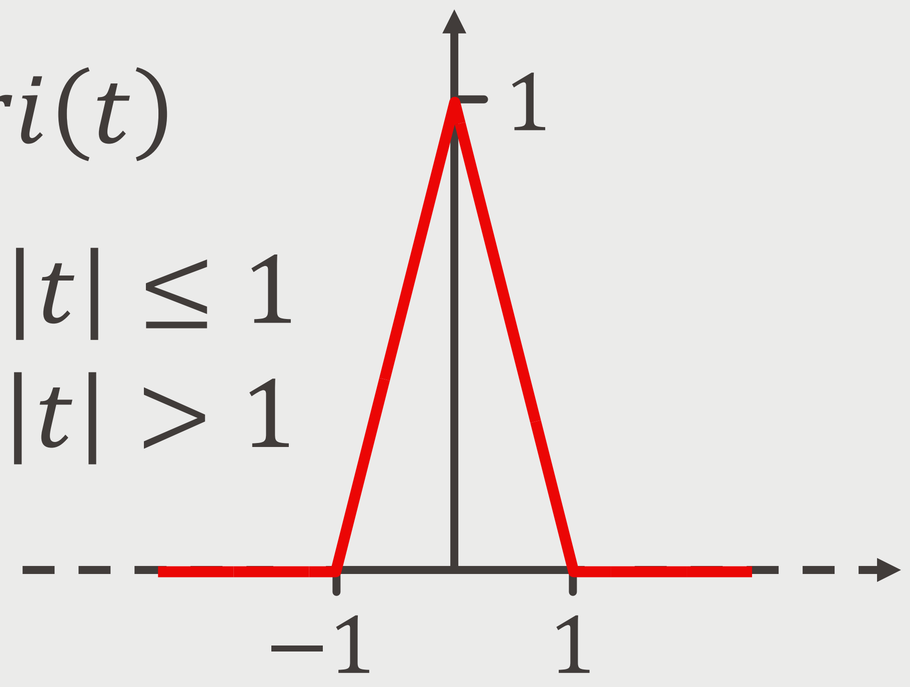
Exemple

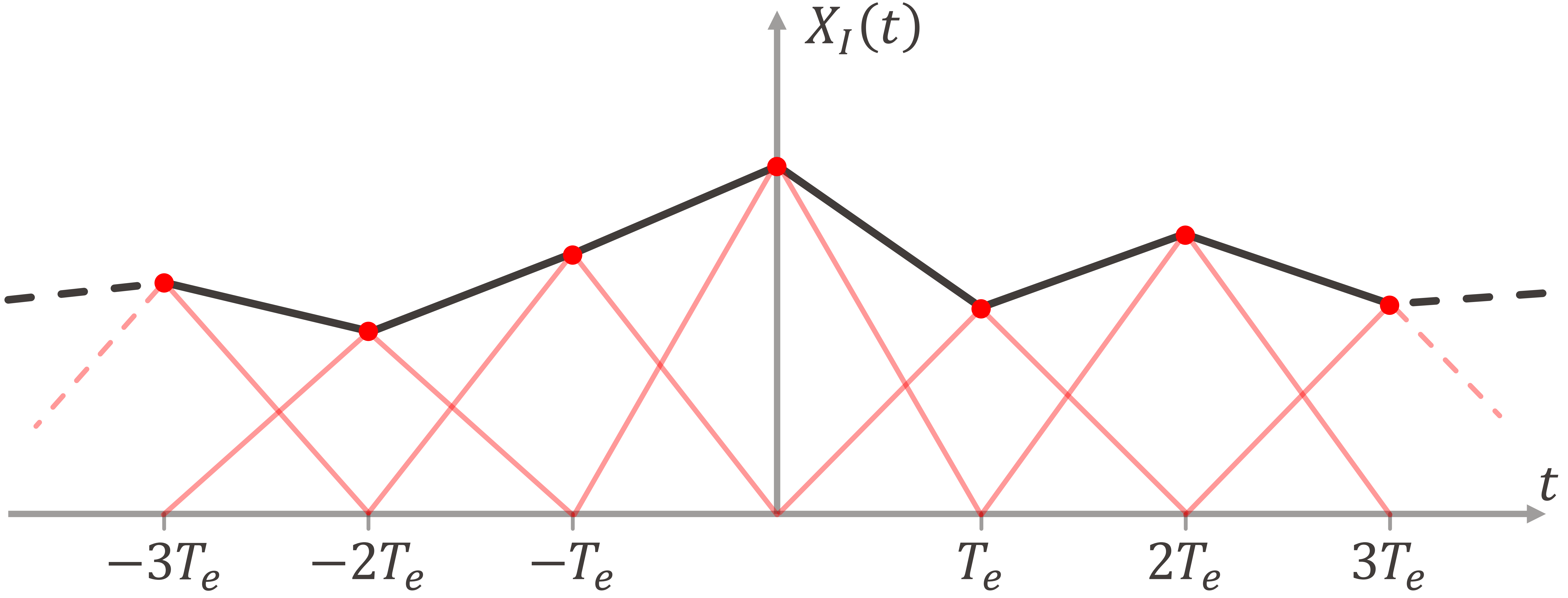
Formule d'interpolation

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\cdot \mathrm{F}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$$

Fonction $tri(t)$

$$F(t) = \begin{cases} 1-|t| & si\ |t|\le 1 \\ 0 & si\ |t|>1 \end{cases}$$



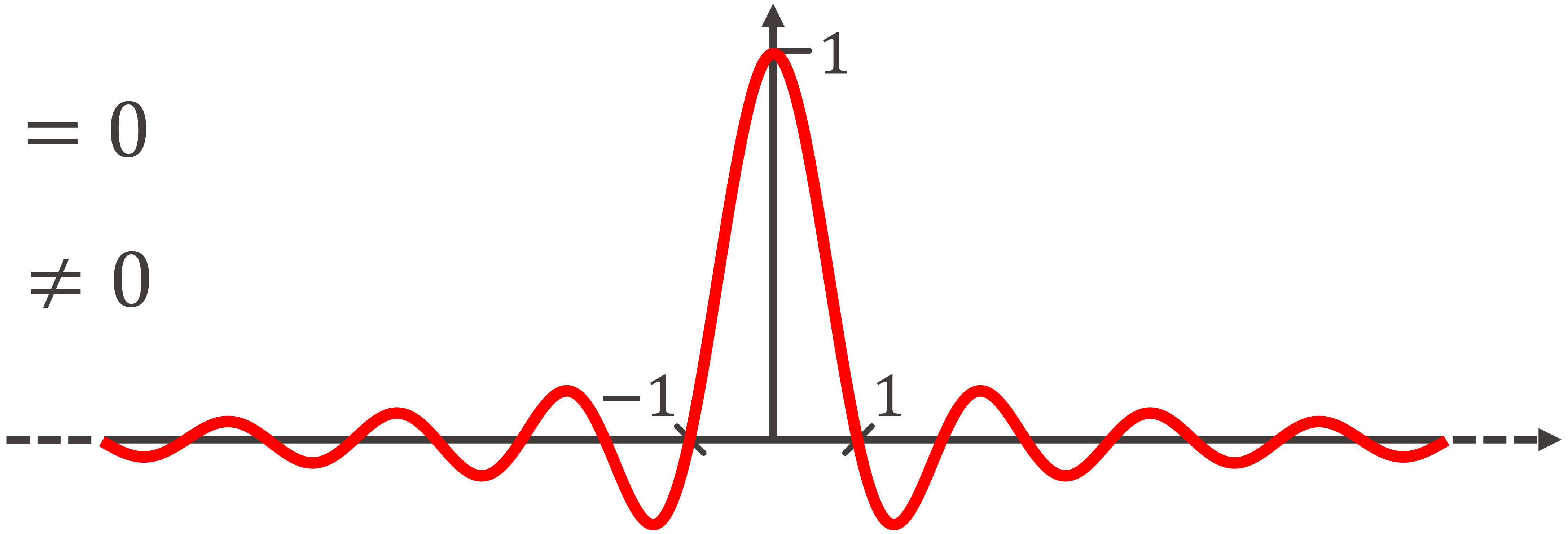


Information, Calcul et Communication

Formule d'interpolation avec $\mathrm{sinc}(t)$

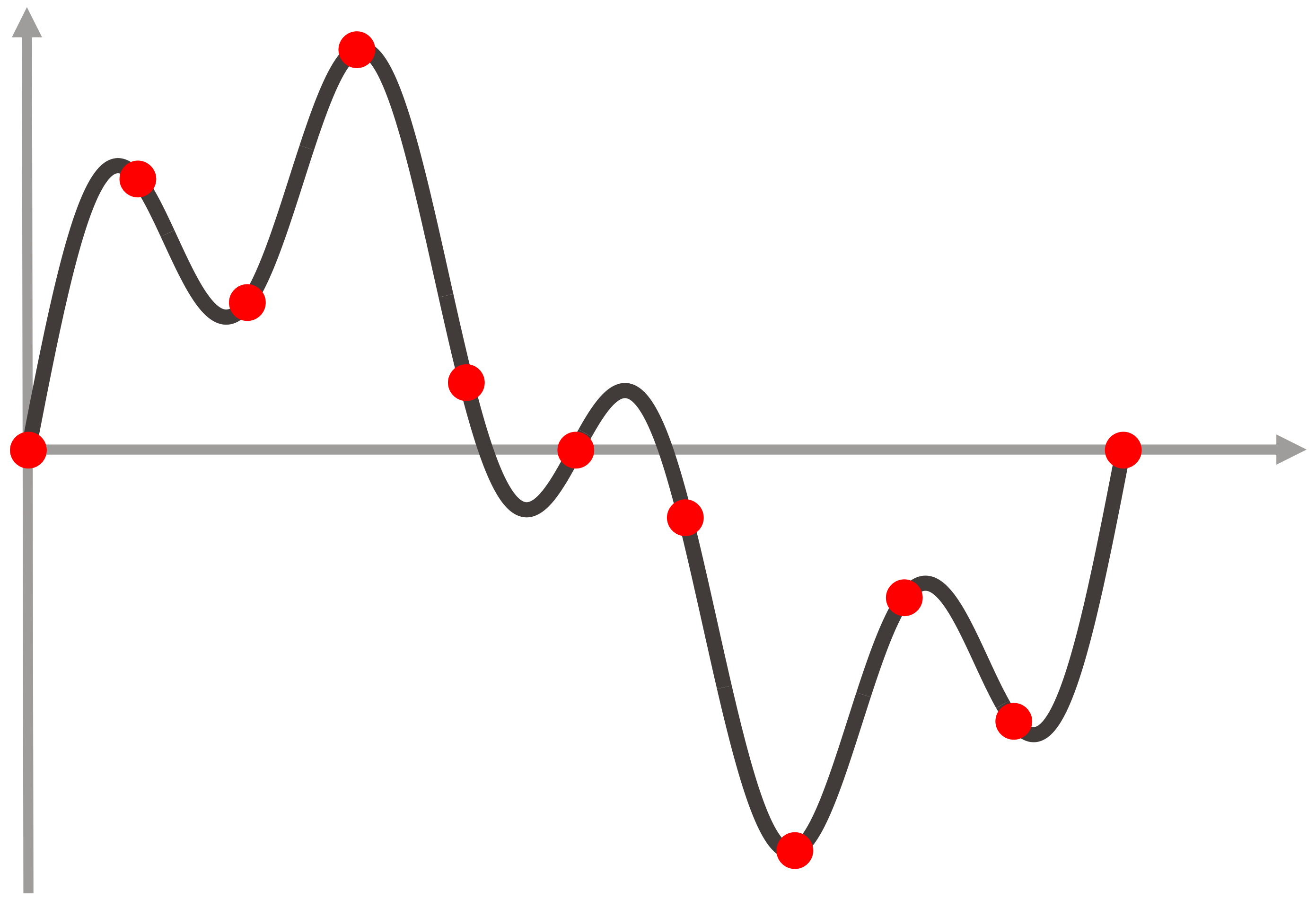
- Il se trouve qu'un bien meilleur choix pour la fonction F est

$$F(t) = \mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & si\ t \neq 0 \end{cases}$$



Ce qui donne dans notre exemple :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



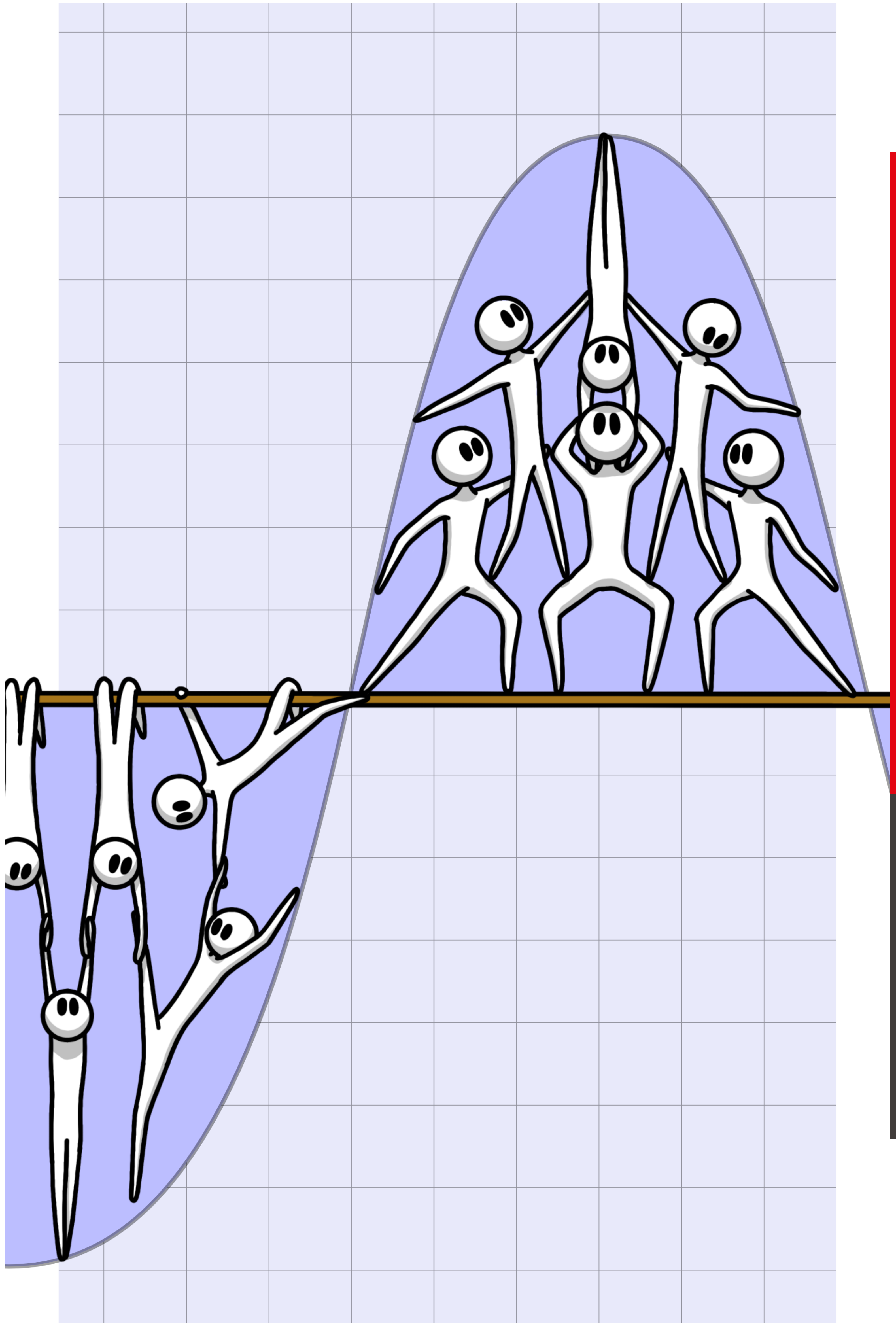
Formule d'interpolation

- À partir des échantillons $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$, nous construisons donc le signal interpolé $X_I(t)$ grâce à la **formule d'interpolation** :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

- Il nous reste maintenant une question cruciale à résoudre :

Quand est-ce que $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?



Information, Calcul et Communication

Le théorème d'échantillonnage

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Le théorème d’échantillonnage : historique

Edmund Taylor Whittaker
1873 - 1956

Harry Nyquist
1889 - 1979

Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov
1908 - 2005

Herbert Raabe
1909 - 2004

Claude Edwood Shannon
1916 - 2001

Enoncé du théorème d'échantillonnage

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$ un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut f_{max}
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné avec une période T_e (et soit f_e la fréquence correspondante : $f_e = 1/T_e$)
- On pose encore $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$

Alors :

- Si $f_e > 2f_{max}$, alors $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors $f_e \geq 2f_{max}$

Illustration du théorème en pratique

- Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

- La version échantillonnée de ce signal est : $X(mT_e) = \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e)$ et la formule d'interpolation devient :

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

- En pratique, on se limite à quelques termes de la somme :

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2\ Hz$ et $f_e = 5\ Hz$ (donc $T_e = 0.2$ sec) :

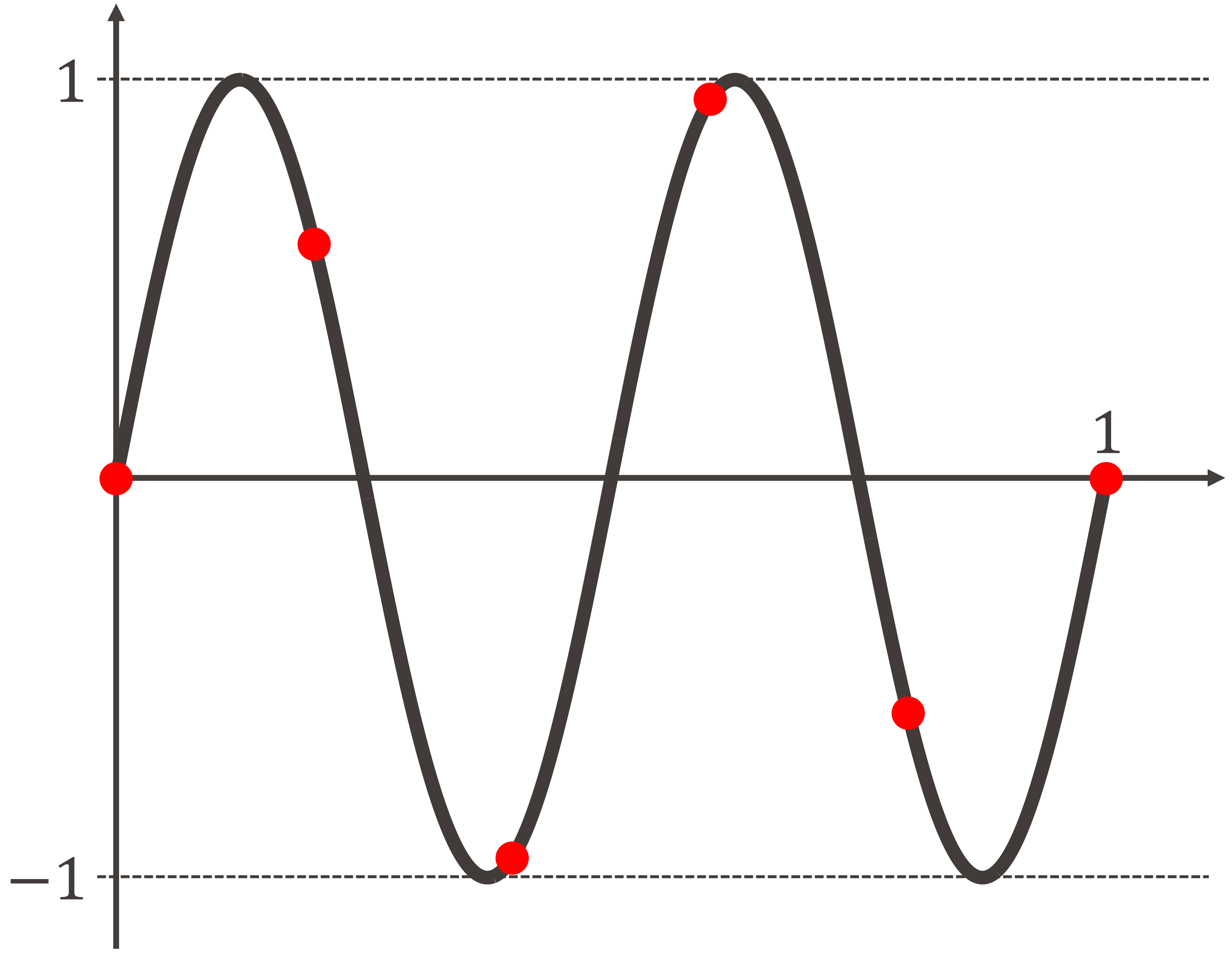
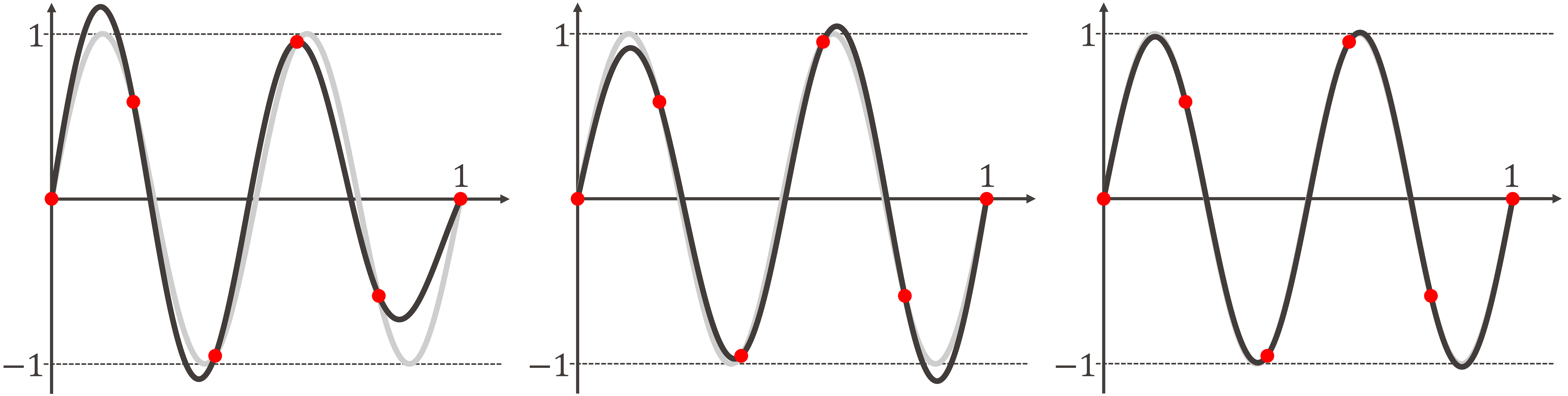


Illustration du théorème en pratique



Avec $N = 5$ — Avec $N = 10$ — Avec $N = 50$

Si $f_e > 2\,f$, la reconstruction est bonne pour grand N.

Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 3\ Hz$ et $f_e = 5\ Hz$ (donc $T_e = 0.2$ sec) :

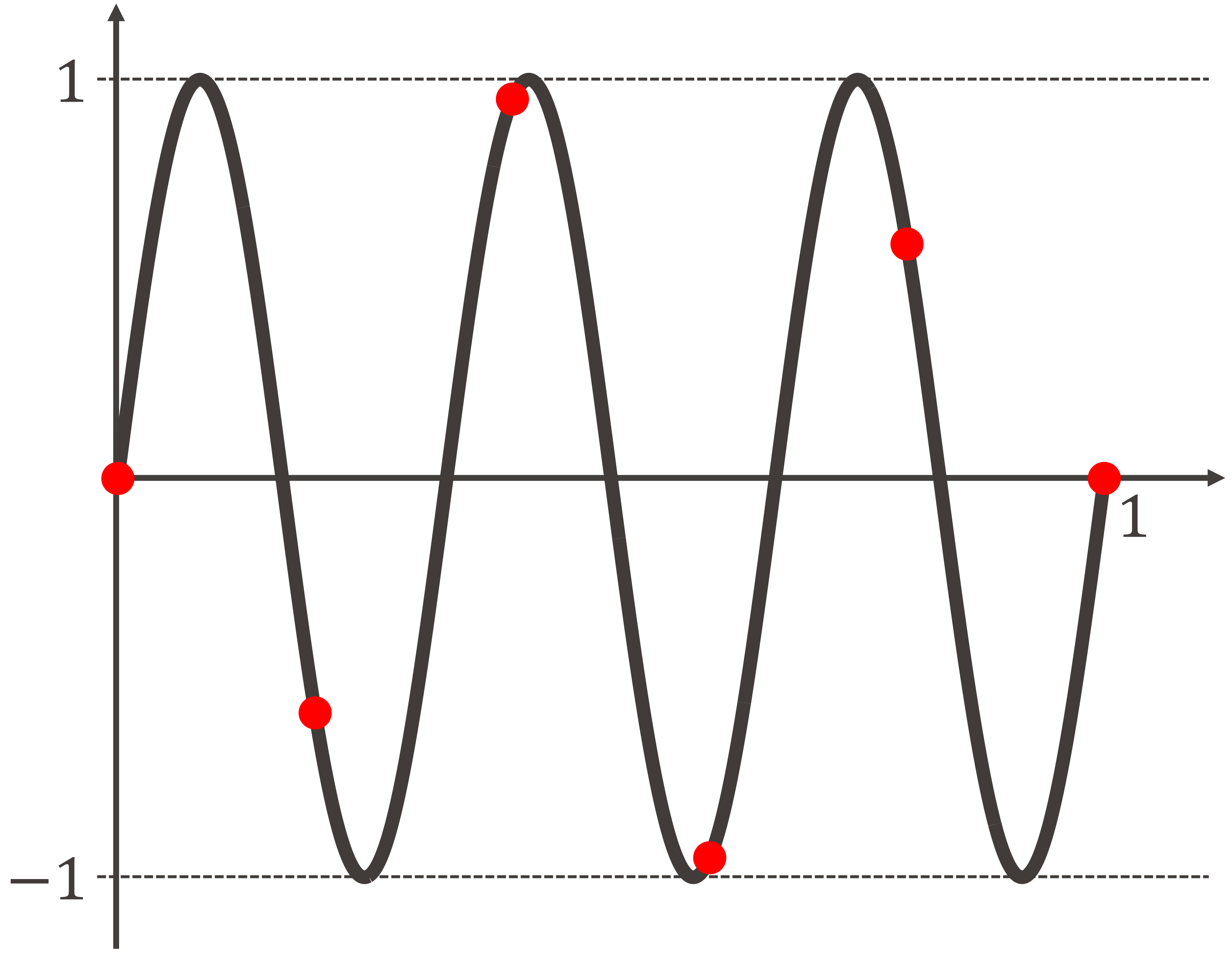
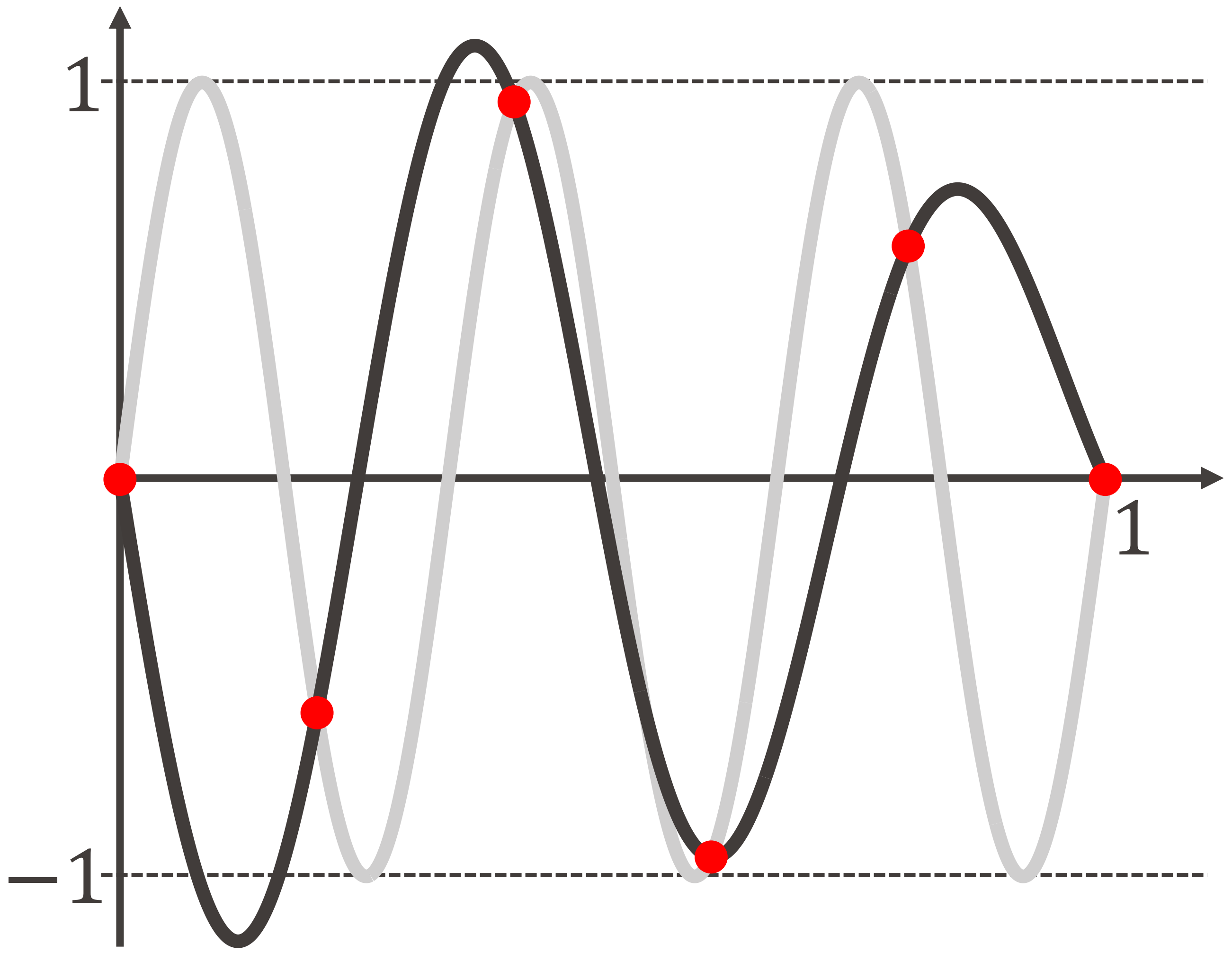
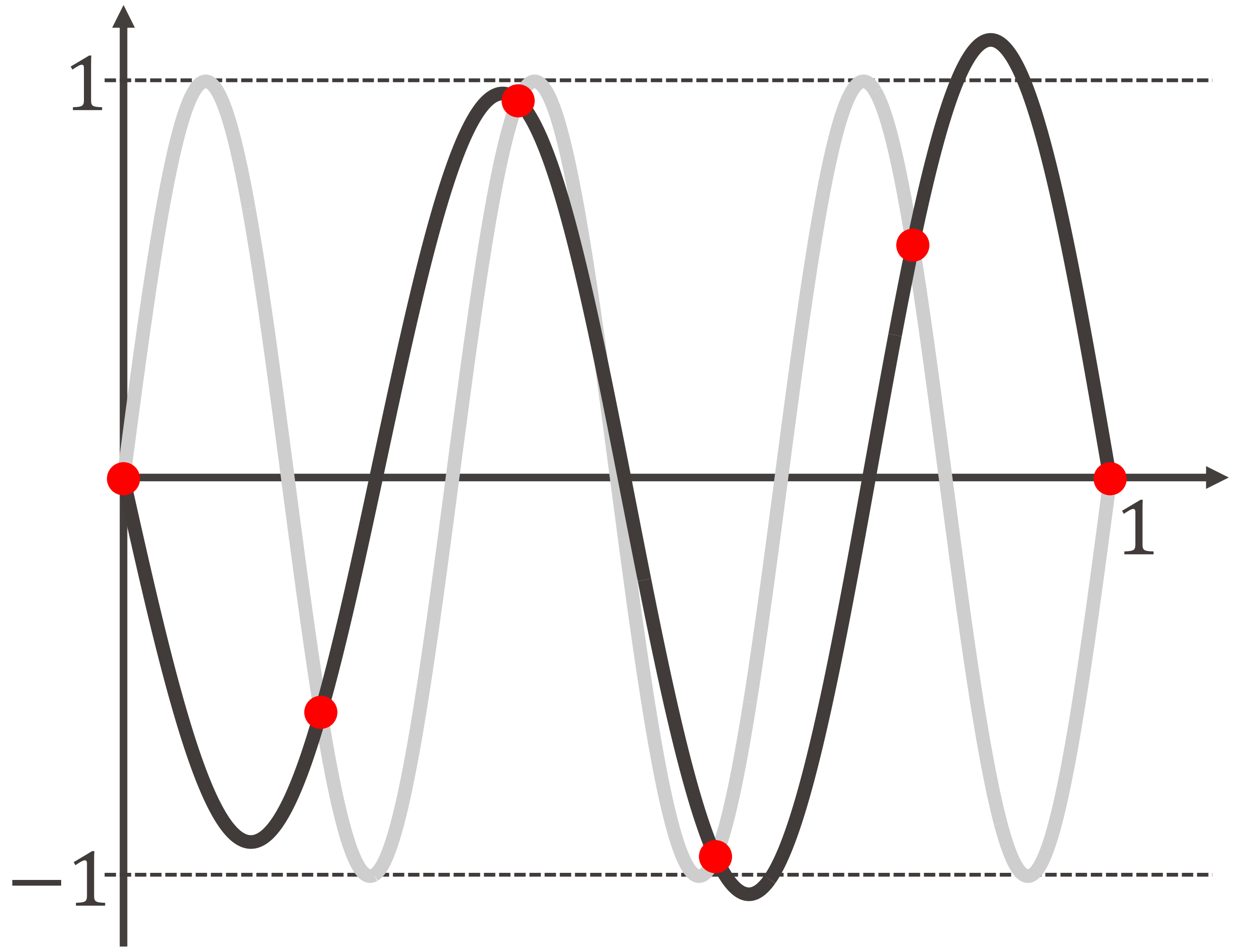


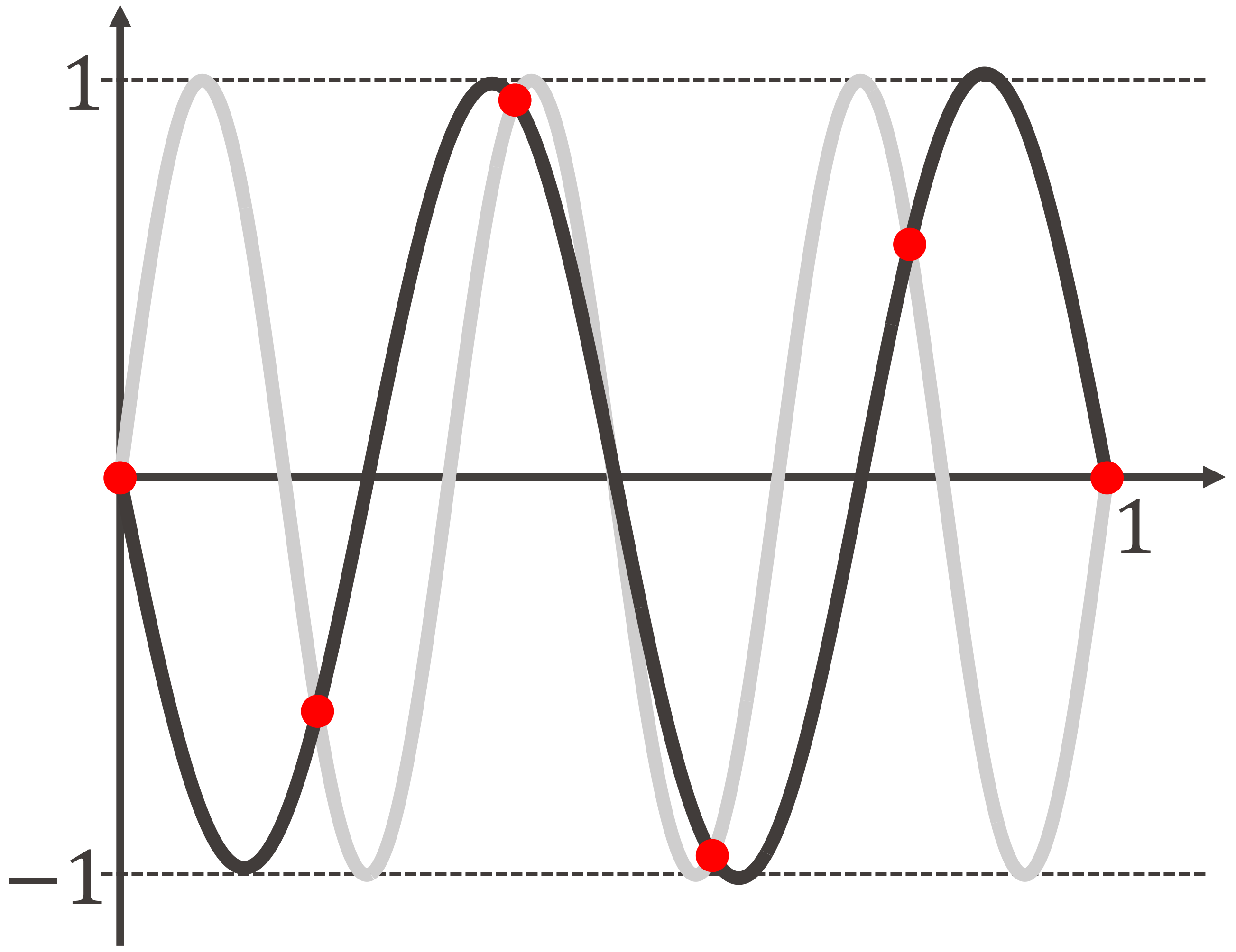
Illustration du théorème en pratique



Avec $N = 5$



Avec $N = 10$



Avec $N = 50$

Ici, par contre, $f_e < 2f$: on a un problème...

Et si $f_e = 2f$?

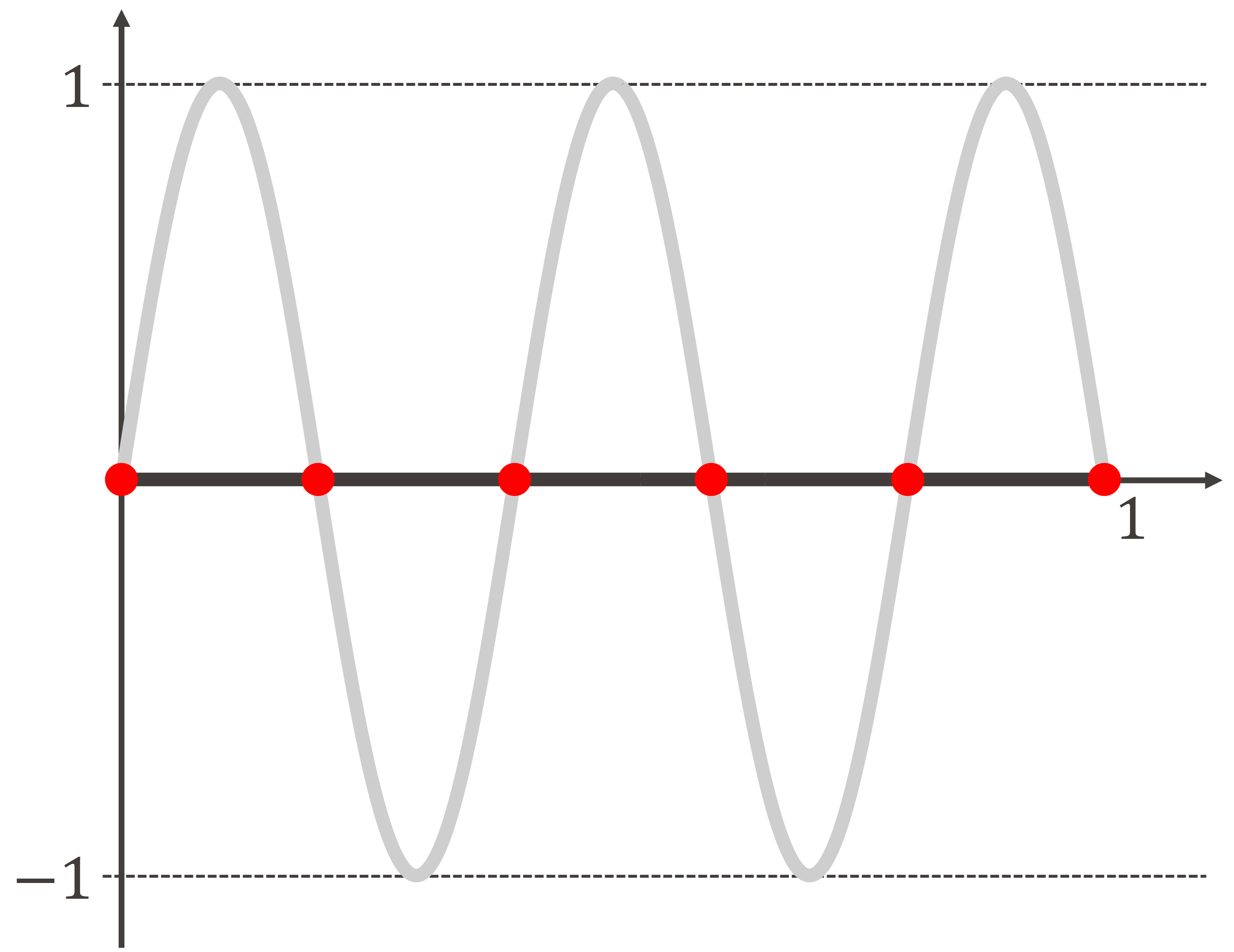
Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2.5\ Hz$ et $f_e = 5\ Hz$ (donc $T_e = 0.2$ sec) :

Fonction nulle, $\forall N \in \mathbb{N}$!

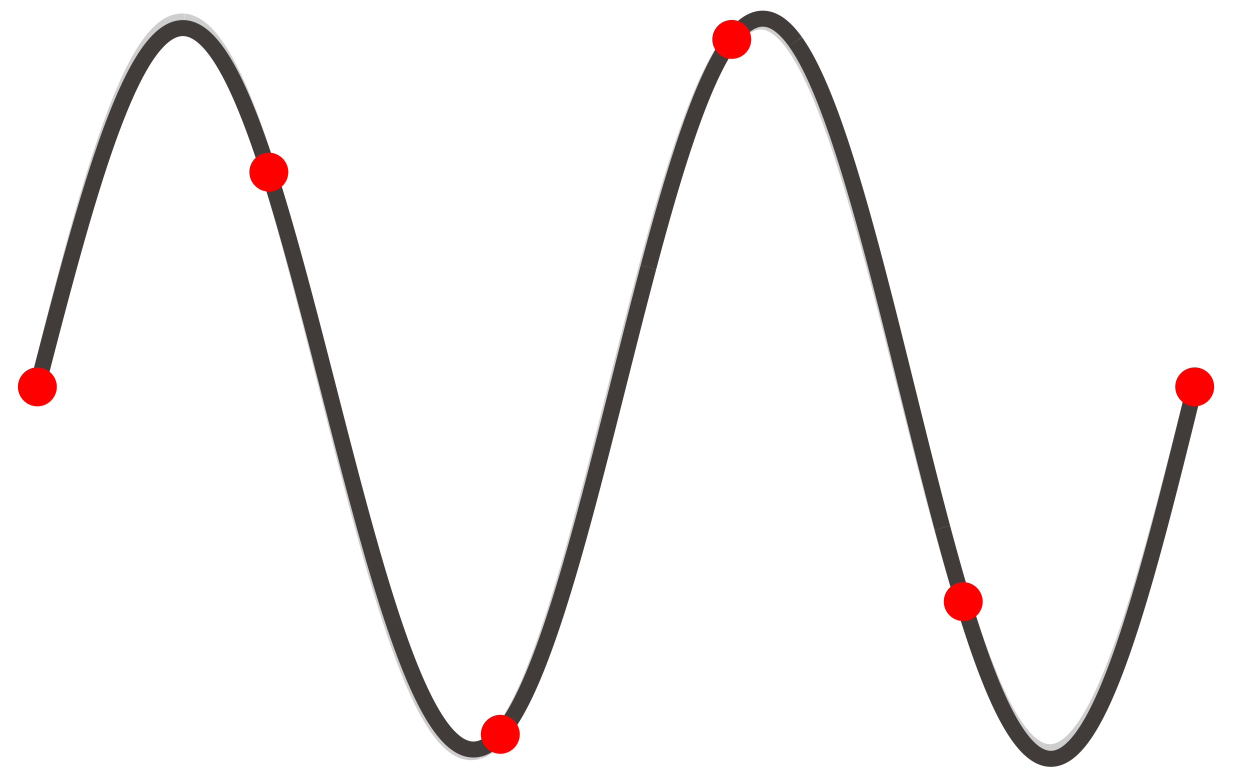
Ici aussi, on a un problème...



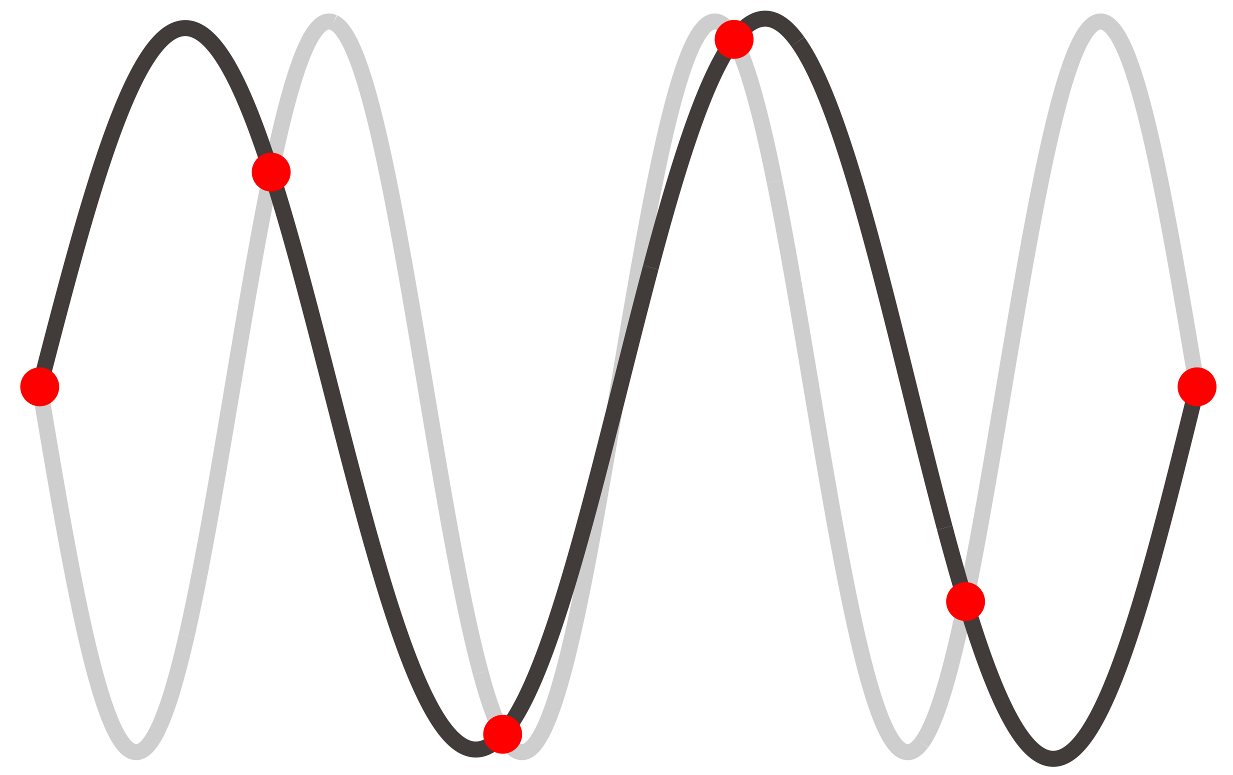
Essayons de mieux comprendre cette illustration

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5\ Hz$.

- Quand $f = 2\ Hz$, la reconstruction est bonne.



- Quand $f = 3\ Hz$, la reconstruction est mauvaise.



- Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !
- La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite, mais pas le signal d'origine (en transparence)

Illustration : conclusion

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5\ Hz$.

- A partir des seules valeurs échantillonnées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de $f = 2\ Hz$ ou de $f = 3\ Hz$.
- Dans une telle situation, notre formule d'interpolation choisit la fréquence la plus basse, i.e., $f = 2\ Hz$.
- Donc, si on sait dès le départ que la fréquence f de la sinusoïde d'origine est plus petite que $\frac{f_e}{2} = 2.5\ Hz$, alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- Si par contre la fréquence f est plus grande que $\frac{f_e}{2} = 2.5\ Hz$, alors la formule d'interpolation choisit la mauvaise fréquence : $\tilde{f} = f_e - f$. C'est l'effet stroboscopique que nous avons vu dans une vidéo précédente.

Pourquoi f_{max} dans le théorème ?

- Dans l'illustration précédente, on avait affaire à un signal $X(t)$ avec une seule fréquence f.
- On a vu dans ce cas que $f_e > 2f$ est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.

Et si maintenant le signal $X(t)$ contient deux fréquences f_1 et f_2 ?

- Dans ce cas, il suffit que $f_e > 2f_1$ *et* $f_e > 2f_2$ pour que le signal soit bien reconstruit, i.e., que $f_e > 2\max\{f_1, f_2\}$.
- En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc à la condition

$$f_e > 2f_{max}.$$

Enoncé du théorème d'échantillonnage

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$ un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut f_{max}
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné avec une période T_e (et soit f_e la fréquence correspondante : $f_e = 1/T_e$)
- On pose encore $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$

Alors :

- Si $f_e > 2f_{max}$, alors $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors $f_e \geq 2f_{max}$

Un lemme utile pour la démonstration

Lemme : La bande passante du signal $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$.

Démonstration du lemme : Remarquez tout d'abord que

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 2\int_0^{1/2} \cos(2\pi t \cdot f) \cdot df$$

i.e., le signal $\operatorname{sinc}(t)$ est une somme (infinie) de sinusoïdes de fréquences f allant de 0 à $\frac{1}{2}$. Sa bande passante vaut donc $\frac{1}{2}$.

La bande passante signal $\operatorname{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right) = \operatorname{sinc}(f_e t \ - m)$ vaut donc $\frac{f_e}{2}$.

Et la bande passante du signal $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$ est donc inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$. QED

Idée de la démonstration du théorème

Démontrons d'abord la **seconde implication** (plus facile) :

$$\text{Si } X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2f_{max}$$

- Si $X_I(t) = X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, alors ils ont même bande passante (forcément : ce sont les mêmes signaux).
- Or d'après le lemme, la bande passante du signal $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$.
- La bande passante f_{max} du signal $X(t)$ est donc également inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$. QED

Idée de la démonstration du théorème

Passons maintenant à la **première implication** :

$$\text{Si } f_e > 2f_{max}, \quad \text{alors} \quad X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- L'hypothèse et le lemme impliquent que les signaux $X(t)$ et $X_I(t)$ ont tous deux une bande passante plus petite (ou égale) à $f_e/2$.
- On a vu d'autre part que $X_I(nT_e) = X(nT_e)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- On peut montrer le résultat suivant :

  Deux signaux de bande passante plus petite (ou égale) à $\frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$
  et qui coïncident aux points nT_e , $n \in \mathbb{Z}$, coïncident en fait partout !

- En conclusion, sous l'hypothèse effectuée, on a bien $X_I(t) = X(t)$ $\forall\ t \in \mathbb{R}$.
  «QED»

EPFL

Information, Calcul et Communication

Filtrer avant d’échantillonner

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Sous-échantillonnage d'un signal

- Lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence $f_e < 2f_{max}$, apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé précédemment.

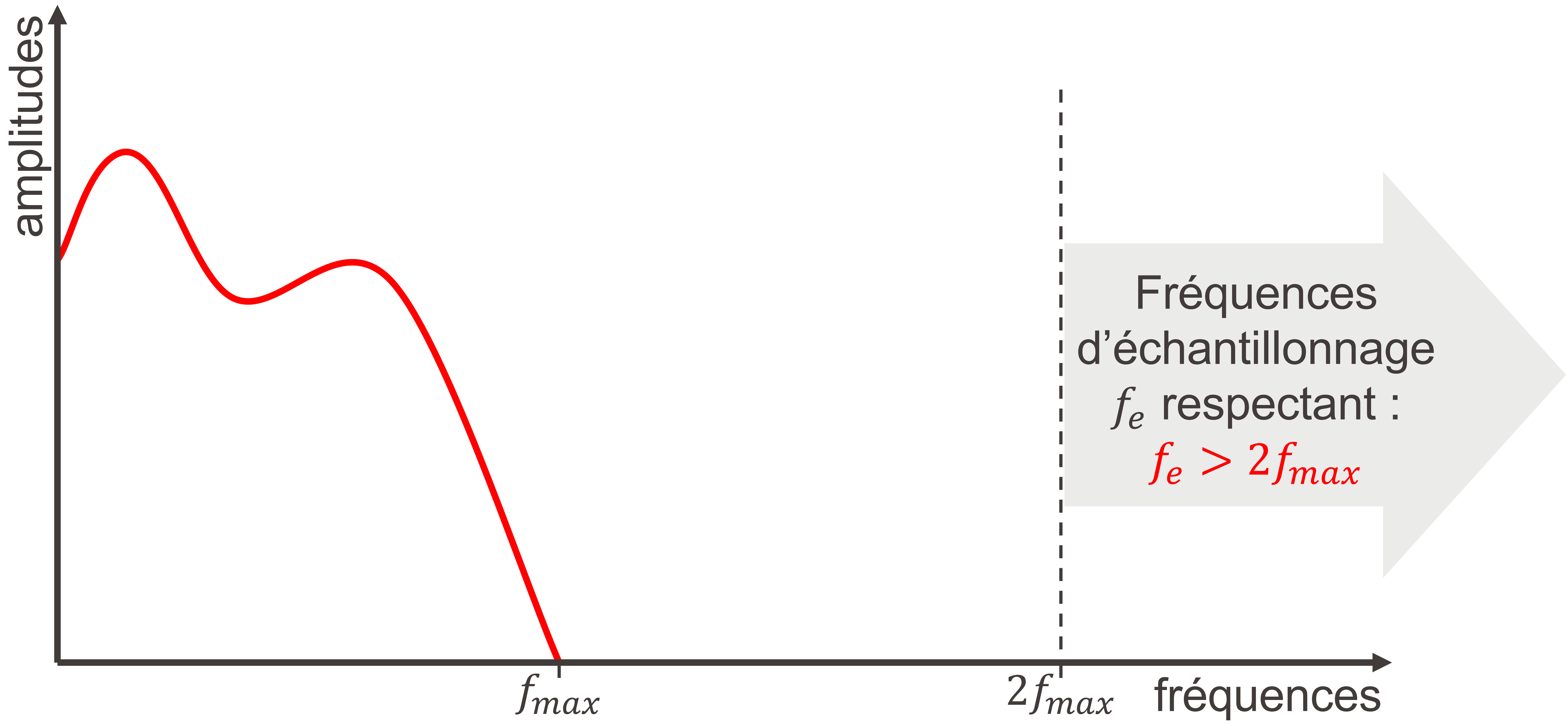
- On dit alors que le signal est **sous-échantillonné**.

- En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique !

- Une solution simple :

  augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à satisfaire la condition $f_e > 2f_{max}$.

1ère Solution : décomposition spectrale



$1^{\text{ère}}$ Solution : limitations

- Ceci dit, cette solution d'augmenter f_e peut s'avérer très coûteuse, voire carrément impossible à réaliser en pratique, suivant l'appareillage de mesure dont on dispose.

- De plus, certains signaux contiennent un nombre infini de fréquences (comme la fonction $sinc$), et certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique, des fréquences très élevées).

- Pour ces signaux, $f_{max} = +\infty$: de tels signaux sont donc **toujours sous-échantillonnés**, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage f_e.

Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas ?

Effet stroboscopique : une autre solution

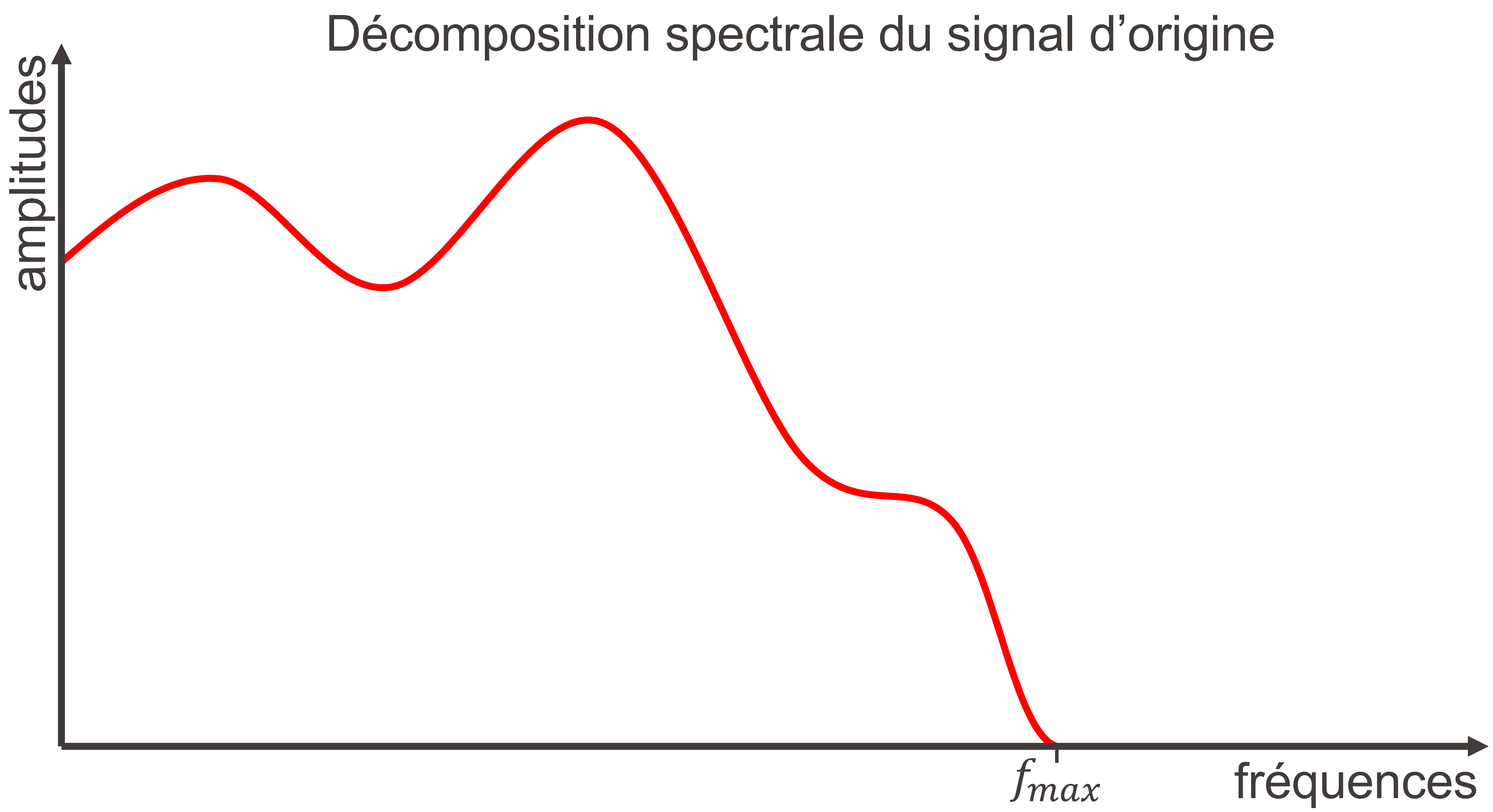
Une solution qui minimise les dégâts consiste à :

filtrer le signal avant de l'échantillonner !

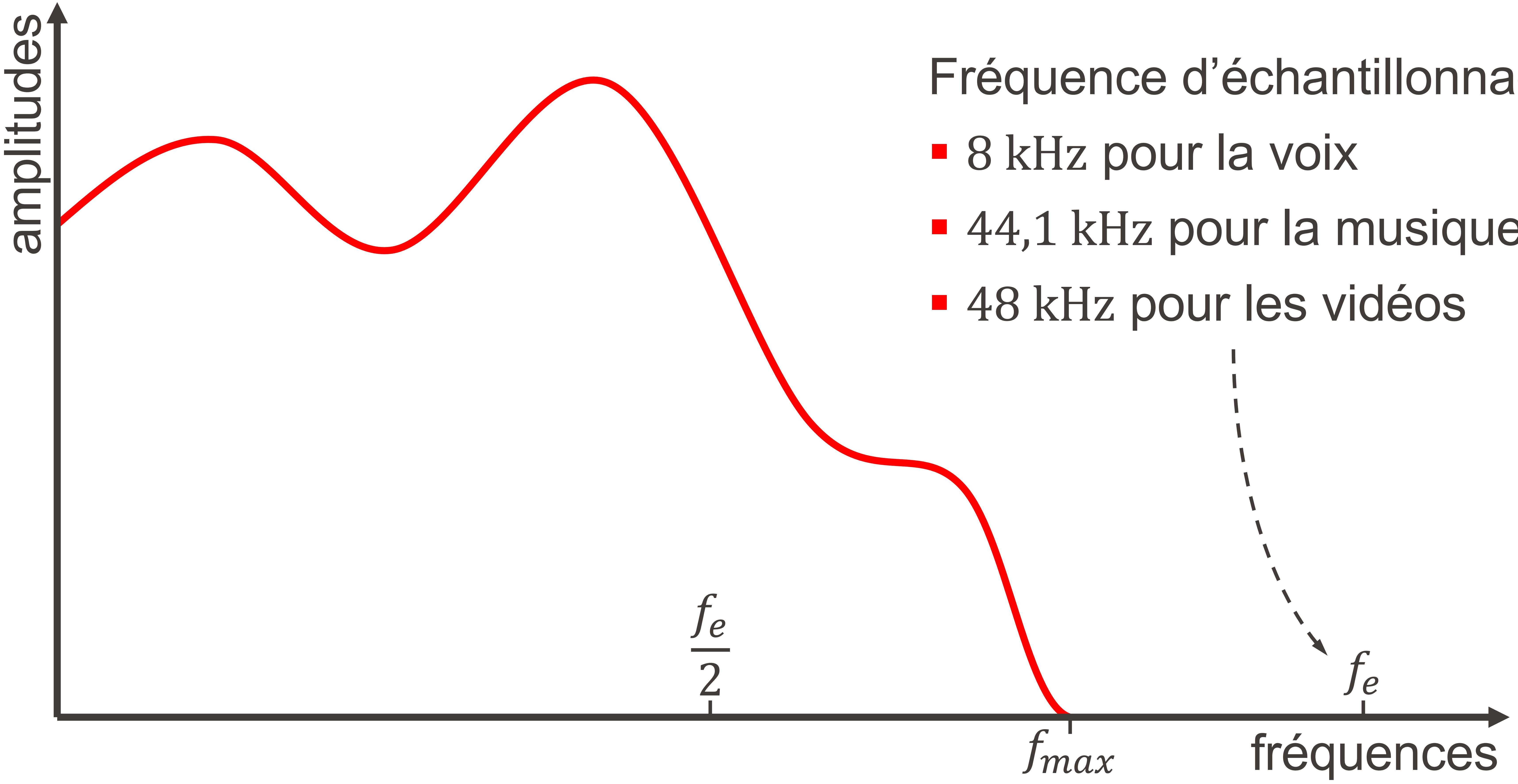
- On filtre le signal avec un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure f_c est juste un peu plus petite que $\frac{f_e}{2}$.
- Puis on échantillonne le signal filtré à la fréquence f_e.
- Et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation.

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite; en particulier, on a pas d'effet stroboscopique.

2ème Solution : décomposition spectrale



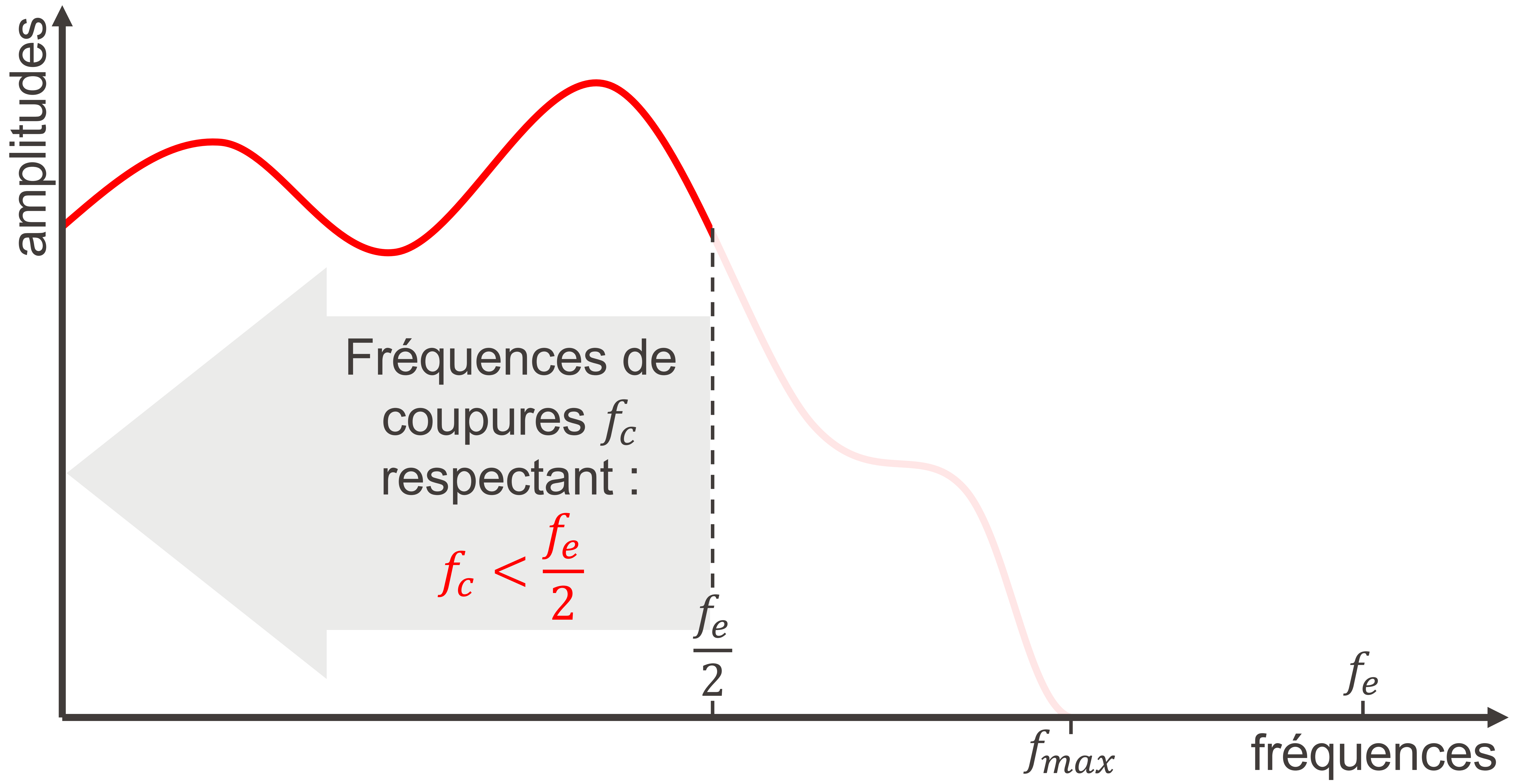
2ème Solution : décomposition spectrale



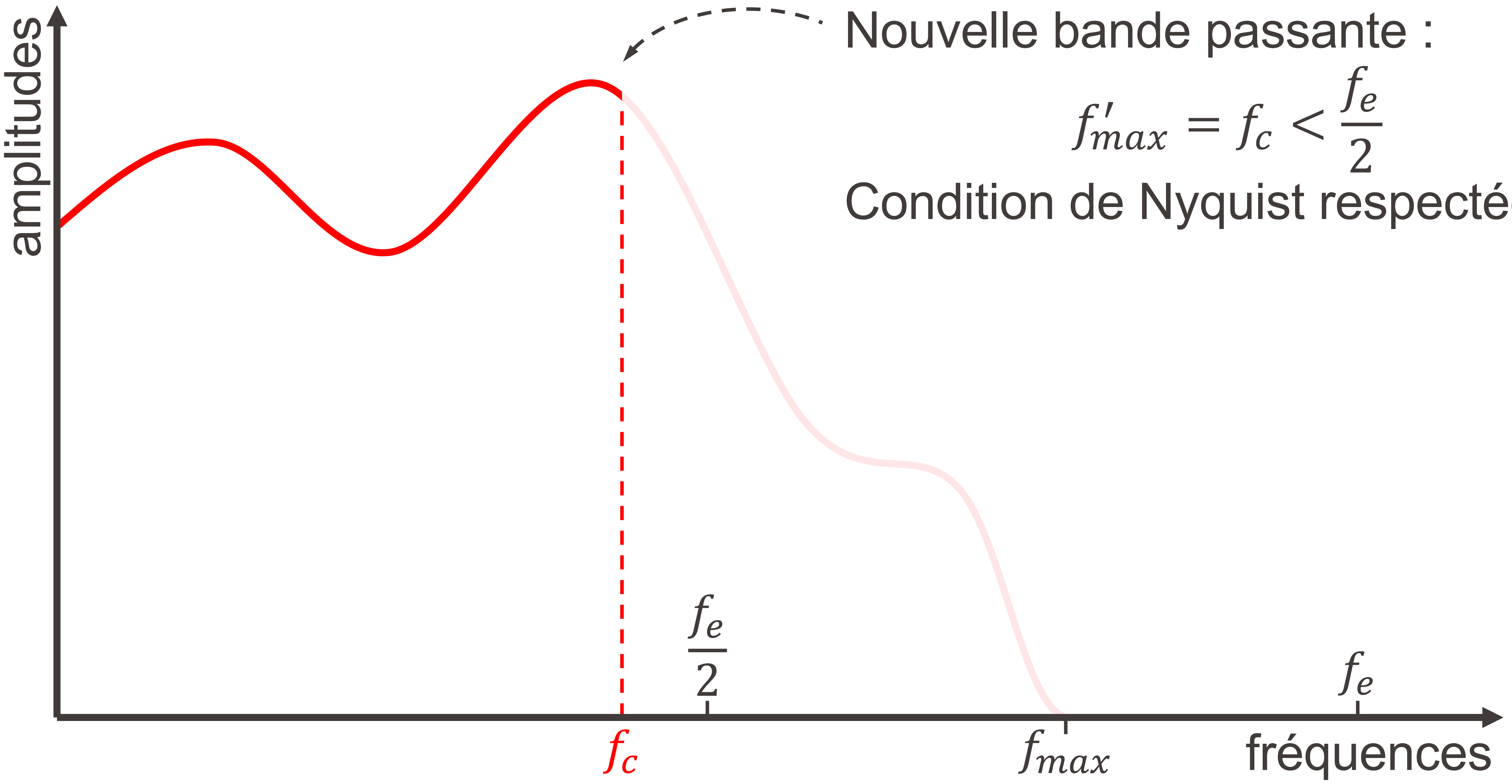
Fréquence d'échantillonnage f_e

- $8\ \mathrm{kHz}$ pour la voix
- $44{,}1\ \mathrm{kHz}$ pour la musique
- $48\ \mathrm{kHz}$ pour les vidéos

2ème Solution : décomposition spectrale



2ème Solution : décomposition spectrale

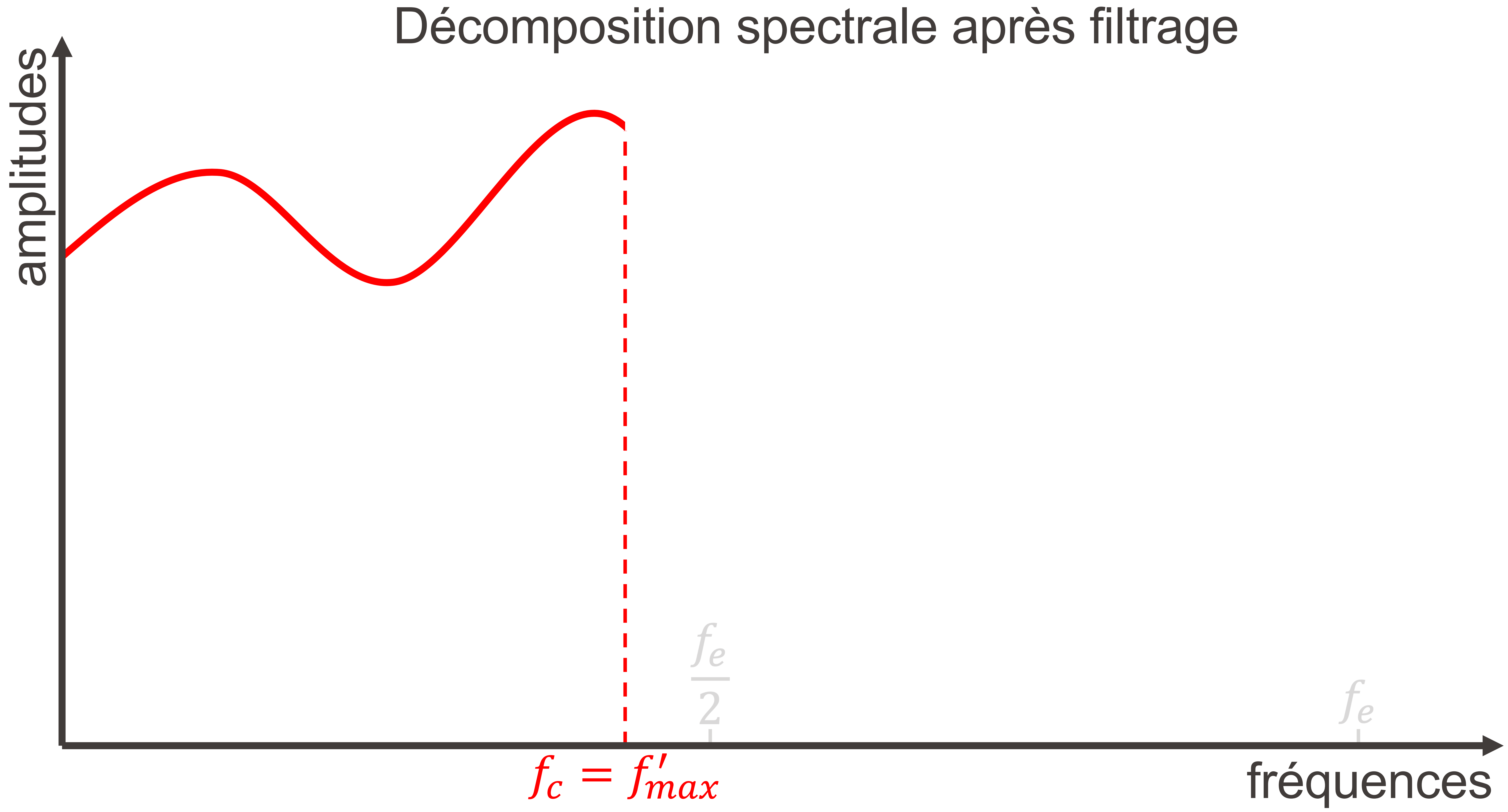


Nouvelle bande passante :

$$f'_{max} = f_c < \frac{f_e}{2}$$

Condition de Nyquist respectée ✅

$2^{ème}$ Solution : décomposition spectrale



Exemple sonore

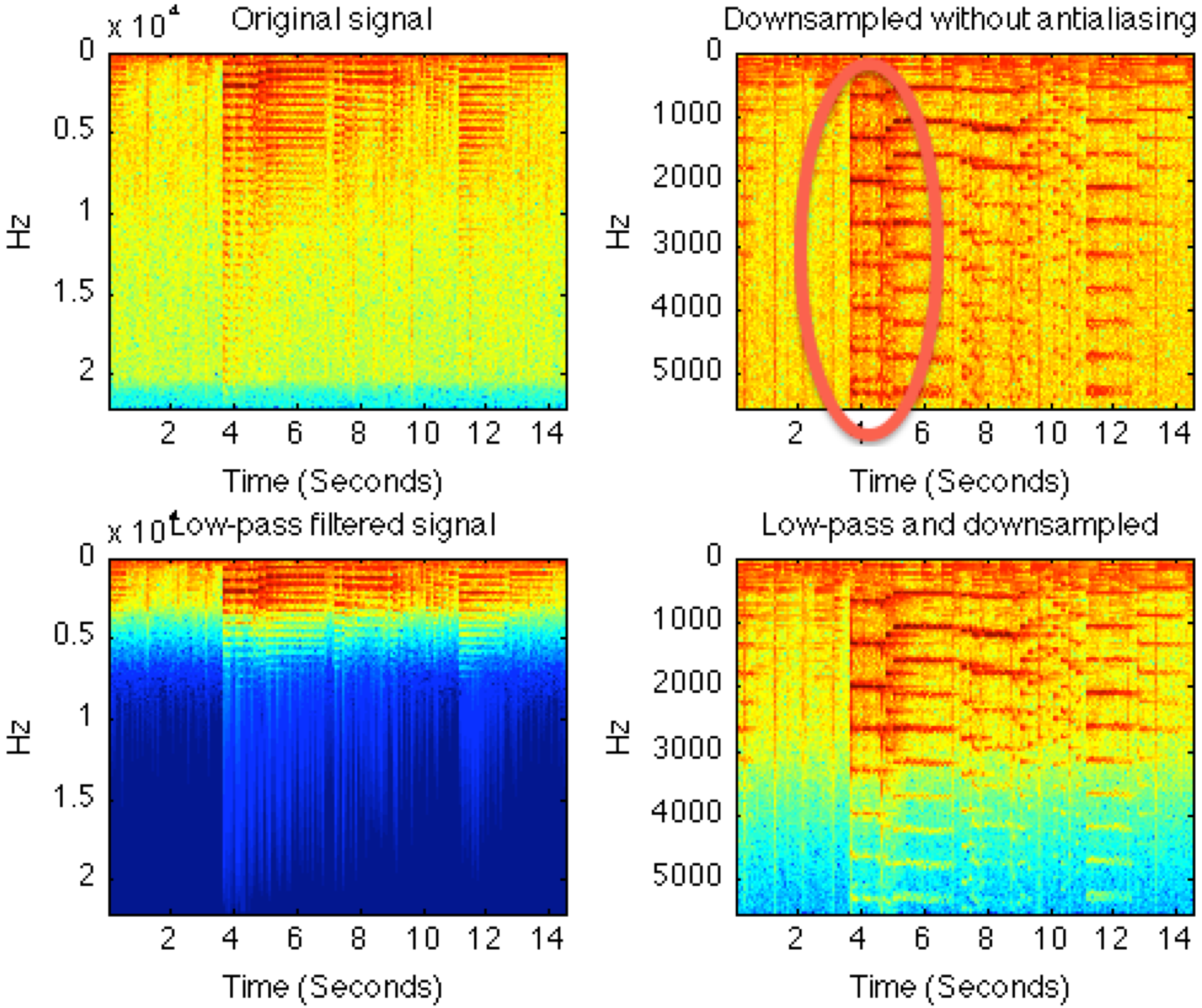
Sur un support numérique, le son est échantillonné à une fréquence $f_e = 44.1\ \mathrm{kHz}$, car les fréquences au dessus de $22\ \mathrm{kHz}$ ne sont (en général) pas perçues par l'oreille humaine. Celles-ci sont donc filtrées avant l'échantillonnage, ce qui garantit que la condition de Nyquist soit respectée.

Démonstration

Vous allez maintenant entendre trois extraits d'un morceau de musique Jazz :

("Our love is here to stay" de Georges Gerschwin, joué par Roland Kirk)

- Un premier extrait, où le son a été filtré à 22 kHz avant d'être échantillonné à 44.1 kHz.
- Un deuxième extrait, où le son a été filtré à 22 kHz, mais a ensuite été échantillonné à 8.82 kHz seulement.
- Et finalement, un troisième extrait, où le son a d'abord été filtré à 4.4 kHz, avant d'être échantillonné à 8.82 kHz.


Original signal
x 10^4
Downsampled without antialiasing
Low-pass filtered signal
x 10^4
Low-pass and downsampled
Hz
Time (Seconds)
0
0.5
1
1.5
2
1000
2000
3000
4000
5000
2
4
6
8
10
12
14