EPFL Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 13

Pour cette series et la suivante il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicit du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 2$.

Pour pouvoir les exercices de cette section il est utile de connaitre les resultats techniques de bases de calcul de determinants donnees dans le poly du cours (pas forcement les preuves mais cela aide toujours). Notamment

- La definition et les proprietes fonctionelles du determinant des endomorphismes : Def. 11.4 et Thm 11.9
- La definition et les proprietes fonctionelles du determinant des matrices : Def. 11.6 et Thm 11.10.
- Les calculs de determinants en dimension 2 et 3 : Ex. 11.2.1.
- Les determinants des matrices blocs : Thm 11.11 et Cor. 11.4.
- Les calculs de determinants via les operations elementaires : §11.3.2
- Le developpement de Lagrange (Lignes et colonnes) : Thm 11.12 et 11.13.
- L'enonce de la formule de Cramer : Thm 11.14.
- Le polynome caracteristique d'une matrice et d'un endomorphisme : Def. 12.1&12.3, Thm 12.1& 12.2 &12.3

Calculs de determinants

Exercice 1. Calculer les determinants des matrices suivantes (pour a, b, c, λ dans un corps K) : utiliser des operations elementaires pour eventuellement vous ramener a des matrices blocs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \ B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On suppose $K = \mathbb{C}$. On considere les matrices ($a \in \mathbb{C}$)

$$C = C(a) = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le determinant de C (en fonction de a) par des operations elementaires sur les lignes.
2. Calculer le determinant de C (en fonction de a) par developement de Lagrange le long d'une ligne ou d'une colonne bien choisie.
3. Si la matrice C est inversible pour $a = 1$ calculer son inverse.
4. Montrer (sans le calculer) que $\det D \in \mathbb{Z}$.
5. Calculer le determinant de D (de la maniere que vous preferez) et celui de D^3.
6. Soit p un nombre premier. On ecrit D_p pour la matrice D mais vue a coefficients dans $\mathbb{F}_p$ (on remplace 77 par $77_p = 77.1_{\mathbb{F}_p} = 77 \,(\mathrm{mod}\, p)$ et pareil pour les autres coordonnees). Montrer que
$$\det D_p = \det D \,(\mathrm{mod}\, p).$$
7. Pour quelles valeurs de p la matrice D_p est elle de rang 6 ?

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ verifiant

$$M^{2022} + 2022\mathrm{Id}_3 = \mathbf{0}_{3\times 3}$$

(regardez ce que devrait valoir le determinant de cette matrice)

Exercice 4. Soit $M \in M_d(K)$ une matrice. Pour $i, j \leqslant d$ le (i, j) cofacteur de M est le scalaire

$$\mathrm{cof}(M)_{ij} := (-1)^{i+j} \det M(i|j)$$

ou $M(i|j)$ est la matrice de taille $d-1$ obtenue a partir de M en otant la i-ieme ligne et la j-ieme colonne. La matrice des cofacteurs de M que l'on note

$$\mathrm{cof}(M) = (\mathrm{cof}(M)_{ij})_{ij\leqslant d}$$

est la matrice dont la (i, j)-ieme coordonnee est le cofacteur.

Soient E et F les matrices

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & a+5 & 3 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathrm{cof}(E)$ et $\mathrm{cof}(F)$.
2. Verifier les relations de Cramer

$$E.{}^t\mathrm{cof}(E) = \det(E)\mathrm{Id}_3,\ F.{}^t\mathrm{cof}(F) = \det(F)\mathrm{Id}_3.$$

3. Si E ou F est inversible, calculer leur inverse.
4. Calculer le polynome caracteristique de F et verifier le Theoreme de Cayley-Hamilton dans ce cas particulier.

Remarque 0.1. La formule de Cramer (qu'on ne demontrera pas et qui s'obtient a partir des formules de developement de Lagrange) dit que si $M \in M_d(K)$ on a

$$M.{}^t\mathrm{cof}(M) = \det(M).\mathrm{Id}_d.$$

Elle permet de demontrer le theoreme de Cayley-Hamilton.

Exercice 5. Soit $M = (m_{ij})_{ij\leqslant d} \in M_d(\mathbb{C})$ une matrice a coefficients complexes. On pose $\overline{M}(\overline{m}_{ij})_{ij\leqslant d}$ la matrice obtenue an prenant le conjugue complexe de tous les coordonnees de M.

1. Montrer que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.
2. Montrer que $\det(M.\overline{M}) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
3. Montrer par un exemple que l'on a pas toujours $M.\overline{M} \in M_d(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $P_{car,\overline{M}}(X) = \overline{P_{car,M}}(X)$ ou pour un polynome $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, on a note $\overline{P}(X)$ le polynome dont les coefficients sont les conjugues complexes des coefficients de P.
5. Montrer que la polynome produit $P_{car,M}(X).P_{car,\overline{M}}(X) \in \mathbb{R}[X]$ (on utilisera le fait que si $x \in \mathbb{C}$ alors
$$x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{x} = x.$$

Certains groupes de matrices

Exercice 6. Soit K un corps. Une matrice $M \in M_d(K)$ est dite orthogonale si elle verifie

$$M.{}^tM = \mathrm{Id}_d.$$

On note $O_d(K)$ l'ensemble des matrices orthogonales.

1. Montrer que $\det M = \pm 1_K$.
2. Montrer que $\mathrm{O}_d(K) \subset \mathrm{GL}_d(K)$ et que $O_d(K)$ est un sous-groupe de $GL_d(K)$ (le groupe orthogonal).

3. Soit $\mathrm{SO}_d(K) = \{M \in \mathrm{O}_d(K),\ \det M = 1\}$. Montrer que $\mathrm{SO}_d(K)$ est un sous-groupe distingue de $\mathrm{O}_d(K)$.
4. On suppose que car$K \neq 2$ (de sorte que $1_K \neq -1_K$). Montrer qu'il existe M^- une matrice orthogonale de determinant -1 (on cherchera M sous forme diagonale).
5. Montrer que
$$\mathrm{O}_d(K) = \mathrm{SO}_d(K) \sqcup M^-.\mathrm{SO}_d(K).$$

Exercice 7. Soit $M, M' \in M_d(K)$ des matrice triangulaires superieure par blocs carres :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix},\ M_1 \in M_{d_1}(K),\ M_2 \in M_{d_2}(K),\ d_1 + d_2 = d.$$

$$M' = \begin{pmatrix} M_1' & \star \\ \mathbf{0} & M_2' \end{pmatrix},\ M_1' \in M_{d_1}(K),\ M_2' \in M_{d_2}(K),\ d_1 + d_2 = d.$$

1. Montrer que
$$M.M' = \begin{pmatrix} M_1.M_1' & \star \\ \mathbf{0} & M_2.M_2' \end{pmatrix}$$
Les termes "$\star$" designent des matrices de taille $d_1 \times d_2$ dont les valeurs sont differentes et qu'on ne depend pas de calculer et $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{d_2 \times d_1}$ est la matrice nulle de dimensions $d_2 \times d_1$.
2. Montrer que M est inversible ssi M_1 et M_2 le sont et si c'est le cas donner la forme generale de M^{-1}.
3. Montrer que pour $d = d_1 + d_2$
$$P_{d_1,d_2}(K) = \{M = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix},\ M_1 \in \mathrm{GL}_{d_1}(K),\ M_2 \in \mathrm{GL}_{d_2}(K)\}$$
forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(K)$. On l'appelle le sous-groupe parabolique de type (d_1, d_2).
4. Soit $P(X) = a_n.X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$ un polynome et
$$P(M) = \mathrm{ev}_M(P) = a_n.M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_0\mathrm{Id}_d \in M_d(K)$$
son evaluation en la matrice M. Montrer que
$$P(M) = \begin{pmatrix} P(M_1) & \star \\ \mathbf{0} & P(M_2) \end{pmatrix}.$$

Autour de Cayley-Hamilton

Exercice 8. Soit $\mathcal{A}$ une K -algebre (pas forcement commutative) de dimension $d_{\mathcal{A}} \geqslant 1$ et d'unite $1_{\mathcal{A}}$.

Soit $M \in \mathcal{A}$ un element. On a vu (chapitre sur les polynomes) qu'on dispose alors d'une morphisme d'anneaux "d'evaluation en M"

$$\mathrm{ev}_M : P \in K[X] \mapsto P(M) \in \mathcal{A}$$

ou pour

$$P(X) = a_d X^d + a_{d_1} X^{d-1} + \cdots + a_1.X + a_0$$

on pose

$$P(M) = a_d M^d + a_{d_1} M^{d-1} + \cdots + +a_1.M + a_0.1_{\mathcal{A}}.$$

1. Soit $d \geqslant 0$, on considere le morphisme de K-EV obtenu en se restreignant aux polynomes de degree $\leqslant d$

$$\mathrm{ev}_M : P \in K[X]_{\leqslant d} \mapsto P(M) \in \mathcal{A}.$$

2. Montrer que si $d \geqslant d_{\mathcal{A}}$ ce morphisme n'est pas injectif et en deduire qu'il existe un polynome non-nul $P \in K[X] - \{0\}$ (qui peut dependre de M) tel que

$$P(M) = 0.$$

3. Montrer qu'il existe un polynome unitaire Q_M non-nul et unique tel que

$$P(M) = 0_{\mathcal{A}} \Longrightarrow Q_M | P.$$

4. On suppose que $\mathcal{A} = M_d(K)$ et M est une matrice. Montrer que

$$\deg Q_M \leqslant d^2.$$

5. Donner des exemples de matrices 2×2 avec Q_M de degree 1 ou 2 (on regardera des matrices diagonales).

Remarque. Le theoreme de Cayley-Hamilton dit que le polynome caracteristique de M (qui est unitair de degre d)

$$P_{car,M}(X) = \det(X.\mathrm{Id}_d - M)$$

verifie

$$P_{car,M}(M) = 0_{d \times d}.$$

Ainsi pour les algebres de matrices, on a une meilleure majoration du degre de Q_M :

$$\deg Q_M \leqslant d \text{ (au lieu de } \leqslant d^2)$$

Le retour de la matrice compagnon

Exercice 9. Soit un polynome unitaire de degre d,

$$P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \in K[X].$$

On note $\mathrm{b} = (b_0, \cdots, b_{d-1}) \in K^d$ le vecteur de ses coefficients.

La matrice compagnon de P est la matrice

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(K).$$

On a deja vu en exercice (avec $d = 4$) que la matrice compagnon verifie l'equation polynomiale

$$P(M_P) = M_P^d + b_{d-1}M_P^{d-1} + \cdots + b_0\mathrm{Id}_d = \mathbf{0}_{d\times d}. \tag{9.1}$$

Remarque 0.2. Par exemple pour $K = \mathbb{R}$ la matrice compagnon de $X^2 + 1$ est la matrice $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui sert a definir le corps des nombres complexes et qui verifie

$$I^2 + \mathrm{Id}_2 = \mathbf{0}_2.$$

On va demontrer (9.1) pour $d \geqslant 1$ general sans utiliser de calcul matriciel.

Soit $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ la base canonique de K^d et

$$\varphi = \varphi_P : K^d \mapsto K^d$$

l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = M_P$.

1. Montrer que

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \cdots, \varphi(\mathbf{e}_{k-1}) = \mathbf{e}_k, \cdots, \varphi(\mathbf{e}_{d-1}) = \mathbf{e}_d,$$

que

$$\varphi^k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_{k+1},\ k \leqslant d-1$$

et que

$$\varphi(\mathbf{e}_d) + b_{d-1}\mathbf{e}_d + b_{d-2}\mathbf{e}_{d-1} + \cdots + b_0\mathbf{e}_1 = 0.$$

2. Montrer que

$$\varphi^d(\mathbf{e}_1) + b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_1) + \cdots + b_1\varphi(\mathbf{e}_1) + b_0\mathbf{e}_1 = 0$$

et que pour tout $k \geqslant 2$

$$\varphi^d(\mathbf{e}_k) + b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_k) + \cdots + b_1\varphi(\mathbf{e}_k) + b_0\mathbf{e}_k = 0;$$

pour cela on observera que, l'image du morphisme d'evaluation en φ

$$K[\varphi] = \{P(\varphi),\ P \in K[X]\} = \mathrm{ev}_\varphi(K[X]) \subset \mathrm{End}_K(K^d)$$

est un sous-anneau commutatif de $\mathrm{End}_K(K^d)$ et que pour $Q, R \in K[X]$ des polynomes on a

$$Q(\varphi) \circ R(\varphi) = R(\varphi) \circ Q(\varphi).$$

3. Montrer que

$$\varphi^d + b_{d-1}\varphi^{d-1} + \cdots + b_1\varphi + b_0\mathrm{Id}_{K^d} = 0$$

et (9.1).

Exercice 10. Soit

$$P_{car,M_P}(X) = \det(X.\mathrm{Id}_d - M_P) \in K[X]$$

le polynome caracteristique de la matrice compagnon.

1. Montrer que

$$P_{car,M_P}(X) = P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0.$$

Pour cela calculer

$$\det(X.\mathrm{Id}_d - M_P) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

En echelonnant la matrice $X.\mathrm{Id}_d - M_P$ par une suite d'operations de type (III) (dans le corps $K(X)$ des fractions rationelles a coefficients dans K) (Cf. Exo 8 Serie 11).

2. Redemontrer cette egalite en developant le determinant par rapport a la derniere colonne.

3. Retrouver le fait que M_P est inversible ssi $b_0 = 0$ et montrer qu'alors
$$M_P^{-1} = Q(M_P)$$
avec
$$Q(X) = (-b_0^{-1})(X^{d-1} + b_{d-1}X^{d-2} + \cdots + b_1).$$

Remarque. On a montre que le polynome caracteristique $P_{car,M_P}(X)$ de la matrice compagnon M_P est precisement $P(X)$. D'autre part par (9.1), on a alors
$$P_{car,M_P}(M_P) = P(M_P) = \mathbf{0}_{d\times d}.$$
En d'autre termes, on a demontre le Theoreme Cayley-Hamilton (*pour tout matrice* M *on a* $P_{car,M}(M) = \mathbf{0}_{d\times d}$) dans le cas particulier des matrices compagnon.

Dans ce cours, la preuve que nous proposons du Theoreme Cayley-Hamilton consiste precisement a nous ramener au cas des matrices compagnons (il y a d'autres preuves utilisant la formule de Cramer).