Soit $A \in K^{n\times n}$ et $p(z) := \det(A - zI)$ son polynôme caractéristique. p est de la forme

$$p(z) =: a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

À l'aide de la formule de Leibniz, montrer les propositions suivantes :

1. $a_0 = \det(A)$,
2. $a_n = (-1)^n$,
3. $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$,
4. $a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum\limits_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I|=k}} \det(A_I)$,

   pour $1 \leq k \leq n$, et où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I.

Indication pour la question 4 : écrire, pour une permutation $\sigma \in S_n$,

$$\prod_{i=1}^{n}(A - zI)_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n}(A_{i,\sigma(i)} - z\delta_{i,\sigma(i)}) = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} \prod_{i\in I} A_{i,\sigma(i)} \prod_{j\notin I}(-z\delta_{j,\sigma(j)}).$$