INFORMATIONS ET EXEMPLES D'EXERCICES POUR L'EXAMEN "ANNEAUX ET CORPS" – PRINTEMPS 2021

ZSOLT PATAKFALVI

1. Information générale

- L'examen sera constitué de 6 problèmes, partagés en 3 catégories :
  - *2 exercices théoriques* : Ces exercices seront basés sur des propositions, définitions, exemples et démonstrations du cours. Ce qui sera demandé dans ces 2 exercices, est contenu dans les notes LaTeX du cours. Les questions peuvent néanmoins être adaptées un peu par rapport aux notes, afin qu'elles soient adéquates pour un examen. Par exemple, la question d'examen peut être une partie d'un théorème du cours, ou être une combinaison de différents exemples et affirmations des notes. D'autres adaptations sont aussi possibles.
  - *2 exercices des séries.* Les exercices bonus sont aussi éligibles. Vous pouvez trouver des solutions à ces exercices dans les corrections sur Moodle. On peut également envisager une adaptation légère par rapport aux versions des séries.
  - *2 nouveaux exercices* : Ces questions portent sur le contenu du cours et des sessions d'exercice, mais ne seront pas déjà apparues dans les notes ni les séries.
- *Aide-mémoire* : Vous pourrez utiliser un aide-mémoire manuscrit (par vous même) d'une page A4 (possiblement recto-verso) pendant l'examen.
- *Matériel permis pendant l'examen* : votre aide-mémoire, de la nourriture, de quoi écrire, et votre carte camipro. Nous fournirons le papier à brouillon. De plus, vous devrez rendre votre aide-mémoire à la fin de l'examen.
- *Matière exclue* : les parties suivantes de la matière ne figureront pas dans l'examen :
  - Sec 1.5.3,
  - Sec 1.6
  - Sec 3.8
- *Utilisation des résultats du cours* : Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours ou en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat. Quand vous utilisez un résultat du cours ou des exercices, vous devez soit le citer par son nom, soit citer la proposition précisément en disant: on a vu dans le cours que "[ici le résultat de la proposition]".
- *Séances de FAQ* : Il y aura 2 séances de réponses aux questions. Les dates sont
  - 2 juillet 2021, vendredi, et
  - 6 juillet 2021, mardi

  Elles seront de type hybride, en présentiel et en ligne en même temps. Elles dureront 90 minutes, et se finiront plus tôt si vous ne posez plus de questions. Ce ne seront pas des séances de révision : il n y aura pas de présentation préparée, les séances tourneront autour de vos questions.

2. Exemples des exercices théorétiques

(1) Les réponses aux questions suivantes doivent contenir les démonstrations que les exemples donnés ont les propriétés voulues :

   (a) Donnez un exemple d'un anneau intègre qui n'est pas factoriel.

   (b) Donnez un exemple d'un anneau factoriel qui n'est pas principal.

(2) Pour un corps K, démontrez que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) K est parfait.
   (b) Si $f \in K[x]$ est un polynôme irréductible, alors $\frac{\partial}{\partial x}(f) \neq 0$.
   (c) Une des conditions suivantes sont satisfaites :
      1. $\operatorname{car} K = 0$.
      2. $\operatorname{car} K = p$ et $K^p = K$.

3. Exemples d'exercices des séries

(3) (a) Montrez que $x^2 + y^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x, y]$, mais pas dans $\mathbb{C}[x, y]$.
   (b) Montrez que $x^3 - (y^7 + 2y^5 + y^3)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x, y]$.

(4) Soit K un corps de caractéristique $p > 0$, et $\alpha \neq 0 \in K$ tel que le pôlynome $f(x) = x^p - x + \alpha \in K[x]$ n'a pas de racines dans K. Soit L le corps de decomposition de f, et $G = \operatorname{Gal}(L/K)$.
   (a) Montrez que $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   [*Indication*: Si β est une racine de f, alors $\beta + \gamma$ l'est aussi, pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_p$.]
   (b) Montrez que le pôlynome f est irréductible sur K.
   (c) Considérons $K = \mathbb{F}_p(t)$. Montrez que le pôlynome $f(x) = x^p - x + t \in K[x]$ n'a pas de racines dans K.
   (d) Soit K et f comme dans le point précédent. Démontrez que le corps de décomposition de f sur K est isomorphe à un corps de fonctions rationnelles $K(u)$.

4. Nouveaux exercices

On donne 4 exemples, mais l'examen ne comportera que 2 nouveaux exercices.

(5) Soit F un corps. Calculez les nombres suivants :
   (a) $\dim_F \left(F[x] \big/ (x^6 + x^4, x^2 + x) \right)$
   [*Indication*: la réponse dépend de la caractéristique de F.]
   (b) $\dim_F \left(F[x, y] \big/ (x^2, y^3) \right)$.

(6) Pour un entier premier $p \in \mathbb{N}$, considérons $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq \mathbb{Q}$. Autrement dit, on a $A = \left\{ \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Soit $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow A$ l'inclusion naturelle.
   (a) Démontrez que pour un homomorphisme $\phi : B \to C$ d'anneau, et pour un idéal à gauche $I \subseteq B$, le sous-ensemble suivant de C est un idéal à gauche de C :

$$\phi^e(I) \overset{\text{def}}{=} C \cdot \phi(I) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \phi(b_i) \;\middle|\; 0 < n \in \mathbb{N},\ b_i \in I,\ c_i \in C \right\}$$

   (b) Démontrez que pour un idéal quelconque $J \subseteq A$, on a $\iota^e\big(\iota^{-1}(J)\big) = J$.

(c) Démontrez que pour un idéal premier $q \subseteq \mathbb{Z}$, on a

$$\iota^{-1}\big(\iota^e(q)\big) = \begin{cases} q & , \text{si } p \notin q \\ \mathbb{Z} & , \text{si } p \in q \end{cases}$$

(7) Soit $0 \neq f \in K[x]$ un polynôme de degré n sur un corps K, et soit L le corps de décomposition de f sur K. Supposons que $\mathrm{Gal}(L/K) \cong S_n$.

(a) Démontrez que l'extension $K \subseteq L$ est galoisienne.

(b) Démontrez que f est irréductible.

(c) Supposons que $n > 2$, et soit $\alpha \in L$ une racine de f. Démontrez que le groupe $\mathrm{Gal}\big(K(\alpha)/K\big)$ est trivial.

(8) Soit L est le corps de décomposition de $x^3 - i\sqrt{3}$ sur $K = \mathbb{Q}\big(i\sqrt{3}\big)$. Trouvez $[L : K]$ et $\mathrm{Gal}(L/K)$.