serie 3

Algèbre linéaire avancé I

October 2022

Exercice 1

1. Supposons que $\varphi^{-1}(\{h\})$ est non-vide et laissons $g_0 \in \varphi^{-1}(\{h\})$. Comme φ est un morphisme, pour tous $k \in \ker(\varphi)$ on a

$$\varphi\left(g_0 \star k\right) = \varphi\left(g_0\right) \cdot \varphi(k) = h \cdot e_H = h$$

et donc $g_0 \star \ker(\varphi) \subset \varphi^{-1}(\{h\})$.
Soit $g \in \varphi^{-1}(\{h\})$, g étant arbitraire.
Montrons qu'il existe un $k \in \ker(\varphi)$ tel que $g = g_0 \star k$:
si on prend $k = g_0^{-1} \star g$, on a bien :

$$g_0 \star k = g_0 \star g_0^{-1} \star g = g$$

$g_0^{-1} \star g$ étant bien dans le noyau, puisque

$$\varphi\left(g_0^{-1} \star g\right) = \varphi\left(g_0^{-1}\right) \cdot \varphi(g) = h^{-1} \cdot h = e_H$$

et donc comme $g \in \varphi^{-1}(\{h\})$ était arbitraire, on a bien que
$\varphi^{-1}(\{h\}) \subset g_0 \star \ker(\varphi)$, ce qui conclut.

2. Pour cette question, la preuve est analogue : on a bien

$$\varphi\left(k \star g_0\right) = \varphi\left(k\right) \cdot \varphi(g_0) = e_H \cdot h = h$$

et pour la deuxieme inclusion, il suffit de prendre $k = g \star g_0^{-1}$.

Exercice 2

1. $\forall z \in Z(G)$, on veut montrer que $Z(G) \subset \ker(Ad_\bullet)$, donc que $Ad_z = Id_G$, on a, pour un $g \in G$ quelconque :

$$Ad_z(g) = z.g.z^{-1} = g.z.z^{-1} = g$$

Ce qui conclut la première inclusion. Maintenant, pour un élément arbitraire du noyau k, on a que $Ad_k = Id_G$, donc que : $Ad_k(g) = g \implies k.g.k^{-1} = g \implies k.g = g.k$
Donc $k \in Z(G)$, ce qui conclut la deuxième inclusion, donc l'égalité des 2 ensembles.

2. On a par définition que $Z(G)$ est commutatif. Pour montrer qu il distingué, ils nous suffit de montrer que $Ad_g(Z(G)) \subset Z(G)$, pour chaque g et de conclure par l'énoncé de l'exercice 3.1,

$$\forall z \in Z(G) g.z.g^{-1} = z.g.g^{-1} = z \in Z(G)$$

Ce qui conclut.

exercise 3

1. On sait ici que :

$$\forall d \in D, \forall k \in G, \exists d' \in D, k.d.k^{-1} = d'$$

Montrons que $\forall d \in D, d \in Ad_k(D), \forall k \in G$. On sait que en particulie $Ad_k(D) \subset D$, donc

$$\forall d \in D, \exists d' \in D, k^{-1}.d.k = d'd = k.d'.k^{-1}$$

k étant arbitraire, on a bien que $d \in Ad_(k)$ pour chaque d dans D.
Cela nous permet d'affirmer l'égalité entre les deux ensembles.

2. Soit $g, h \in G$. On suppose que G est commutatif.
Alors $[g, h] = g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} = g \cdot g^{-1} \cdot h \cdot h^{-1} = e_G \cdot e_G = e_G$ donc, pour tout $d \in D(G)$, tel que $d = [g_1, h_1] \cdot \cdots \cdot [g_n, h_n]$ pour un $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, g_i, h_i \in G$ $\forall i \in 1, ..., n$, on a $d = e_G \cdots e_G = e_G$ donc $D(G) = \{e_G\}$.

3. Soit $g, h \in G$.
$Ad_k([g, h]) = k \cdot [g, h] \cdot k^{-1} = k \cdot g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} \cdot k^{-1} =$
$= k \cdot g \cdot k^{-1} \cdot k \cdot h \cdot k^{-1} \cdot k \cdot g^{-1} \cdot k^{-1} \cdot k \cdot h^{-1} \cdot k^{-1} =$
$= (k \cdot g \cdot k^{-1}) \cdot (k \cdot h \cdot k^{-1}) \cdot (k \cdot g^{-1} \cdot k^{-1}) \cdot (k \cdot h^{-1} \cdot k^{-1}) =$
$= Ad_k(g) \cdot Ad_k(h) \cdot Ad_k(g)^{-1} \cdot Ad_k(h)^{-1} = [Ad_k(g), Ad_k(h)]$
où on a utilisé, puisque Ad_k est un morphisme, que $Ad_k(g^{-1}) = Ad_k(g)^{-1}$

4. Soit $g, h \in G$, par le 2), on sait que $Ad_k([g, h]) = [Ad_k(g), Ad_k(h)]$, soit $d \in D(G)$, tel que $d = [g_1, h_1] \cdot \cdots \cdot [g_n, h_n]$ pour un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1, g_i, h_i \in G$ $\forall i \in 1, ..., n$, alors $Ad_k([d]) = Ad_k([g_1, h_1]) \cdot \cdots \cdot Ad_k[g_n, h_n] = [Ad_k(g_1), Ad_k(h_1)] \cdot \cdots \cdot [Ad_k(g_n), Ad_k(h_n)] \in D(G)$ donc $Ad_k(D(G)) \subseteq D(G)$.

Soit $g, h \in G$. On a $[g, h] = [Ad_k(k^{-1}.g.k), Ad_k(k^{-1}.h.k)] = Ad_k([k^{-1}.g.k, k^{-1}.h.k])$
donc soit $d = [g_1, h_1] \cdot \cdots \cdot [g_n, h_n]$ pour un $n \in \mathbb{N}$,
$n \geq 1, g_i, h_i \in G$ $\forall i \in 1, ..., n$, on a :
$d = Ad_k([k^{-1}.g_1.k, k^{-1}.h_1.k]) \cdot \cdots \cdot Ad_k([k^{-1}.g_n.k, k^{-1}.h_n.k])$
$d = Ad_k([k^{-1}.g_1.k, k^{-1}.h_1.k] \cdot \cdots \cdot [k^{-1}.g_n.k, k^{-1}.h_n.k]) \in Ad_k(D(G))$
Donc $D(G) \subseteq Ad_k(G)$ ce qui conclut.

5. Soit $g, h \in G$. On souhaite montrer que $\varphi(g.h.g^{-1}.h^{-1}) = e_Z$.
$\varphi(g.h.g^{-1} - h^{-1}) = \varphi(g).\varphi(h).\varphi(g)^{-1}.\varphi(h)^{-1} = \varphi(g).\varphi(g)^{-1}.\varphi(h).\varphi(h)^{-1}$
$= e_Z$
où on a utilisé que $\forall i \in G$, $\varphi(i) \in Z$ commute.
Ainsi, soit $d = [g_1, h_1] \cdot \dots \cdot [g_n, h_n]$ pour un $n \in \mathbb{N}$,
$n \geq 1, g_i, h_i \in G$ $\forall i \in 1, ..., n$, on a :
$\varphi(d) = \varphi[g_1, h_1] \cdot \dots \cdot \varphi[g_n, h_n] = e_z \cdot \dots \cdot e_Z = e_Z$
Donc $D(G) \subseteq ker(\varphi)$.

Exercice 4

1. On note par $\mathcal{R} \subset X \times X$ la relation

$$\mathcal{R} = \{(x, x') \in X \times X : \exists g \in G x' = \varphi(g)(x)\}.$$

Reflexivité : Soit $x \in X$. Comme $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ est un morphisme, on a $\varphi(e_G) = \mathrm{Id}_X$, Donc

$$x = \varphi(e_G)(x)$$

et donc $(x, x) \in \mathcal{R}$.
Symmetrie : Soit $(x, x') \in \mathcal{R}$. Donc il existe par définition $g \in G$ tel que $x' = \varphi(g)(x)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} x &= \varphi(e_G)(x) = \varphi\left(g^{-1}g\right)(x) = \left(\varphi\left(g^{-1}\right) \circ \varphi(g)\right)(x) \\ &= \varphi\left(g^{-1}\right)(\varphi(g)(x)) = \varphi\left(g^{-1}\right)(x') \end{aligned}$$

et donc $(x', x) \in \mathcal{R}$.
Transitivité : Soit $(x, x'), (x', x'') \in \mathcal{R}$. Par conséquent il existe $g, g' \in G$ tel que $x' = \varphi(g)(x)$ et $x'' = \varphi(g')(x')$. On déduit

$$\begin{aligned} x'' &= \varphi(g')(x') = \varphi(g')(\varphi(g)(x)) = (\varphi(g') \circ \varphi(g))(x) \\ &= \varphi(g'g)(x). \end{aligned}$$

2. La permutation en question est $(1,3,5)(2,7)(4,6)$ Les 3 G-orbites sont donc $\{1,3,5\}$, $\{2,7\}$ et $\{4,6\}$.

Exercice 5

1. Pour montrer l'équivalence entre chacune des propositions, nous allons procéder de la facon suivante : nous allons prouver que :
$a) \implies b) \implies c) \implies a)$
$a) \implies b)$:
On souhaite montrer que : $\varphi \circ \bullet^{-1}$ est bien un morphisme, en sachant que φ est la donnée d'un antimorphisme.

On peut vérifier très aisément la trivialité de l'élément neutre en utilisant qu'il est l'inverse de lui meme. Ensuite :

$$\varphi \circ \bullet^{-1}(g \star h) = \varphi(h^{-1} \star g^{-1}) = \varphi(g^{-1}).\varphi(h^{-1}) = \varphi \circ \bullet^{-1}(g).\varphi \circ \bullet^{-1}(h)$$

ce qui conclut cette première partie.

2. $b) \implies c)$

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi \circ \bullet^{-1}(g) = (\varphi \circ \bullet^{-1}(g^{-1}))^{-1} = (\varphi(g))^{-1}$$

Donc les deuc morphismes sont en fait égaux, donc la donnée du premier morphisme implique l'existence du second.

3. $c) \implies a)$:

$$(\varphi((g \star h)^{-1}))^{-1} = \bullet^{-1} \circ \varphi(h^{-1} \star g^{-1}) = \bullet^{-1} \circ \varphi(h^{-1}).\bullet^{-1} \circ \varphi(g^{-1}) = (\varphi(h^{-1}))^{-1}.(\varphi(g^{-1}))^{-1}$$

Or, par la 2), on sait que $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$(\varphi((g \star h)^{-1}))^{-1} = \varphi(g \star h)$$

et que :

$$(\varphi(h^{-1}))^{-1}.(\varphi(g^{-1}))^{-1} = \varphi(h).\varphi(g)$$

donc que :

$$\varphi(g \star h) = \varphi(h).\varphi(g)$$

On a donc bien que φ est un antimorphisme.

Exercice 6

1. Supposons que $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ satisfait que $\varphi \circ \bullet^{-1}$ est un morphisme. Définissons pour tout $x \in X$ et pour tout $g \in G$

$$x \mid g = \varphi(g)(x).$$

(a) Soit $x \in X$. Comme $\varphi \circ \bullet^{-1}$ est un morphisme, on trouve que

$$\varphi(e_G) = \varphi\left(e_G^{-1}\right) = \left(\varphi \circ \bullet^{-1}\right)(e_G) = \mathrm{Id}_X$$

et donc on a

$$x \mid e_G = \varphi(e_G)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$$

ce qui montre la trivialité du élément neutre.

(b) Soit $x \in X$ et $g, h \in G$. Comme $\varphi \circ \bullet^{-1}$ est un morphisme, on trouve que

$$\begin{aligned}\varphi(g \star h) &= \left(\varphi \circ \bullet^{-1}\right)\left(h^{-1} \star g^{-1}\right) = \left(\left(\varphi \circ \bullet^{-1}\right)\left(h^{-1}\right)\right) \circ \left(\left(\varphi \circ \bullet^{-1}\right)\left(g^{-1}\right)\right) \\ &= \varphi(h) \circ \varphi(g)\end{aligned}$$

et donc on a

$$\begin{aligned} x \mid (g \star h) &= \varphi(g \star h)(x) = (\varphi(h) \circ \varphi(g))(x) = \varphi(h)(\varphi(g)(x)) \\ &= \varphi(h)(x \mid g) = (x \mid g) \mid h, \end{aligned}$$

ce qui montre l'associativité.
Inversement, si on a l associativité et la trivialité de l'élément neutre, on a :

$$x \mid (g \star h) = (x \mid g) \mid h \implies \varphi(g \star h)(x) = (\varphi(g)(x)) \mid h \implies \varphi(g \star h)(x) = \varphi(h)\varphi(g)(x)$$

donc que $\varphi(g \star h) = \varphi(h)\varphi(g)$
on a aussi que :

$$x \mid e_G = x \implies \varphi\left(e_G\right)(x) = \mathrm{Id}_X(x) \implies \varphi\left(e_G\right) = \mathrm{Id}_X$$

2. On montre que $\ker(\varphi) = \ker\left(\varphi \circ \bullet^{-1}\right)$. Soit $g \in G$ arbitraire. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in X x \mid g = x &\iff \forall x \in X (x \mid g) \left| g^{-1} = x \right| g^{-1} \\ &\iff \forall x \in X x \left| \left(g \star g^{-1}\right) = x \right| g^{-1} \\ &\iff \forall x \in X x \left| e_G = x \right| g^{-1} \\ &\iff \forall x \in X x = x \mid g^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\varphi(g) = \mathrm{Id}_X \iff \varphi\left(g^{-1}\right) = \mathrm{Id}_X$. Comme $g \in G$ était arbitraire, on en déduit que $\ker(\varphi) = \ker\left(\varphi \circ \bullet^{-1}\right)$.
Comme $\varphi \circ \bullet^{-1}$ est un morphisme, on a vu en cours que cela implique que $\ker(\varphi)$ est un sous-groupe distingué.

Exercice 7

1. Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$. Notez que $f_{|g} = f \circ \varphi(g)$ pour tout $g \in G$.
Soit $x \in X$ arbitraire. On calcule

$$f_{|e_G}(x) = f\left(\varphi\left(e_G\right)(x)\right) = f\left(\mathrm{Id}_X(x)\right) = f(x).$$

Comme $x \in X$ était arbitraire, on déduit $f_{|_G} = f$. Comme f était arbitraire, on déduit la trivialité du élément neutre.

Soit $x \in X$ et $g, h \in G$. On calcule

$$\begin{aligned} f_{|g \star h}(x) &= f(\varphi(g \star h)(x)) = f((\varphi(g) \circ \varphi(h))(x)) \\ &= (f \circ \varphi(g))(\varphi(h) x) \\ &= (f \circ \varphi(g))_{|h}(x) \\ &= \left(f_{|g}\right)_{|h}(x). \end{aligned}$$

Comme $x \in X$ était arbitraire, on en déduit que $f_{|g \star h} = \left(f_{|g}\right)_{|h}$, ce qui montre l'associativité. On a donc bien une action à droite, par la donnée de l'exercice 6.

2. En utilisant la première partie de l'exercice 7, on laisse $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ l'application définit par :

$$\forall g \in G \forall x \in X \quad \varphi(g)(x) = x \mid g.$$

Ainsi, on définit $G \times \mathcal{F}(X,Y) \to \mathcal{F}(X,Y)$ par $g \odot f = f \circ \varphi(g)$.
(a) On a $\varphi(e_G) = \mathrm{Id}_X$ - montré au-dessus - et donc

$$e_G \odot f = f \circ \varphi(e_G) = f \circ \mathrm{Id}_X = f$$

et donc on en déduit la trivialité du élément neutre.
(b) Soit $g, h \in G$. On a $\varphi(g \star h) = \varphi(h) \circ \varphi(g) -$ montré au-dessus - et donc

$$\begin{aligned}(g \star h) \odot f = f \circ \varphi(g \star h) &= f \circ (\varphi(h) \circ \varphi(g)) = (f \circ \varphi(h)) \circ \varphi(g) \\ &= (h \odot f) \circ \varphi(g) = g \odot (h \odot f)\end{aligned}$$

ce qui montre l'associativité. On a donc bien en somme, une action à gauche.

exercice 8

1. On souhaite montrer qu'on a un morphisme entre les groupes $(G, \cdot)$ et $(Bij(G), \circ)$, c'est à dire, que
$t_{g_1 \cdot g_2}(g) = (t_{g_1} \circ t_{g_2})(g)$.
Soit $g, g_1, g_2 \in G$, $t_{g_1 \cdot g_2}(g) = (g_1 \cdot g_2) \cdot (g) = g_1 \cdot (g_2 \cdot g) = g_1 \cdot t_{g_2}(g) = (t_{g_1} \circ t_{g_2})(g)$ donc il s'agit d'un morphisme entre les groupes $(G, \cdot)$ et $(Bij(G), \circ)$.

   Afin de montrer que $t_\bullet$ est injective, on souhaite montrer que $ker(t_\bullet) = \{e_G\}$. Soit $g_1 \in ker(t_\bullet)$, alors $\forall g \in G \ t_{g_1}(g) = g \Rightarrow g_1 \cdot g = g$. Or, le seul élément ayant cette propriété est l'élément neutre e_G de G donc $ker(t_\bullet) = \{e_G\}$ donc $t_\bullet$ est injective.

exercice 9

Le corrigé sera dans la disponible dans celui de la série suivante.

exercice 10

1. On a que $b.a = a.c = 1_A$. Montrons que $b = c$:

$$b.a = a.c \implies b.b.a = b.a.c \implies b.(1_A) = (1_A).c \implies b = c$$

ce qui conclut la première partie.

2. a) On veut montrer que : $P \circ D = Id_{\mathbb{Z}}$, avec P, la fonction qui associe a un entier la partie entière de la fraction de lui meme sur 2.

$$P \circ D(n) = P(2n) = n$$

b)Procédons par l'absure, et supposons qu'il existe un inverse H' à droite à la fonction D, cela signifierait que :

$$D \circ H'(n) = n \implies 2(H'(n)) = n$$

Or pour chaque entier impair, c'est mal défini :
En effet, $H'(n)$ doit renvoyer un entier, donc l'équation traduirait le fait qu'un entier pair soit égal a un entier impair, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas d'inverse à droite pour D.