

# Mécanique des composites 2022

`pierre-etienne.bourban@epfl.ch`

Institut des matériaux (IMX)  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL),  
CH-1015 Lausanne

# Mécanique des composites

Micro et macromécanique

Tests mécaniques

Endommagement et rupture

CADFEM

Applications



Les stratifiés

Les structures sandwich

Les composites textiles

# Biblio

Les matériaux composites organiques  
Traité des matériaux, vol 15, PPUR, Lausanne

Matériaux composites, Composites Materials  
D. Gay, Lavoisier Hermes 2015

Comprehensive composite materials,  
Kelly A, Zweben C. ed., Elsevier 2000

Engineering mechanics of composites materials,  
I.M. Daniel, O. Ishai, Oxford University Press

Design and manufacture of composite structures  
G. Eckold, Woodhead publishing, 1994

Manufacturing Techniques for Polymer Matrix  
Composites, Woodhead, S.G. Advani, K-T Hsiao,  
2012

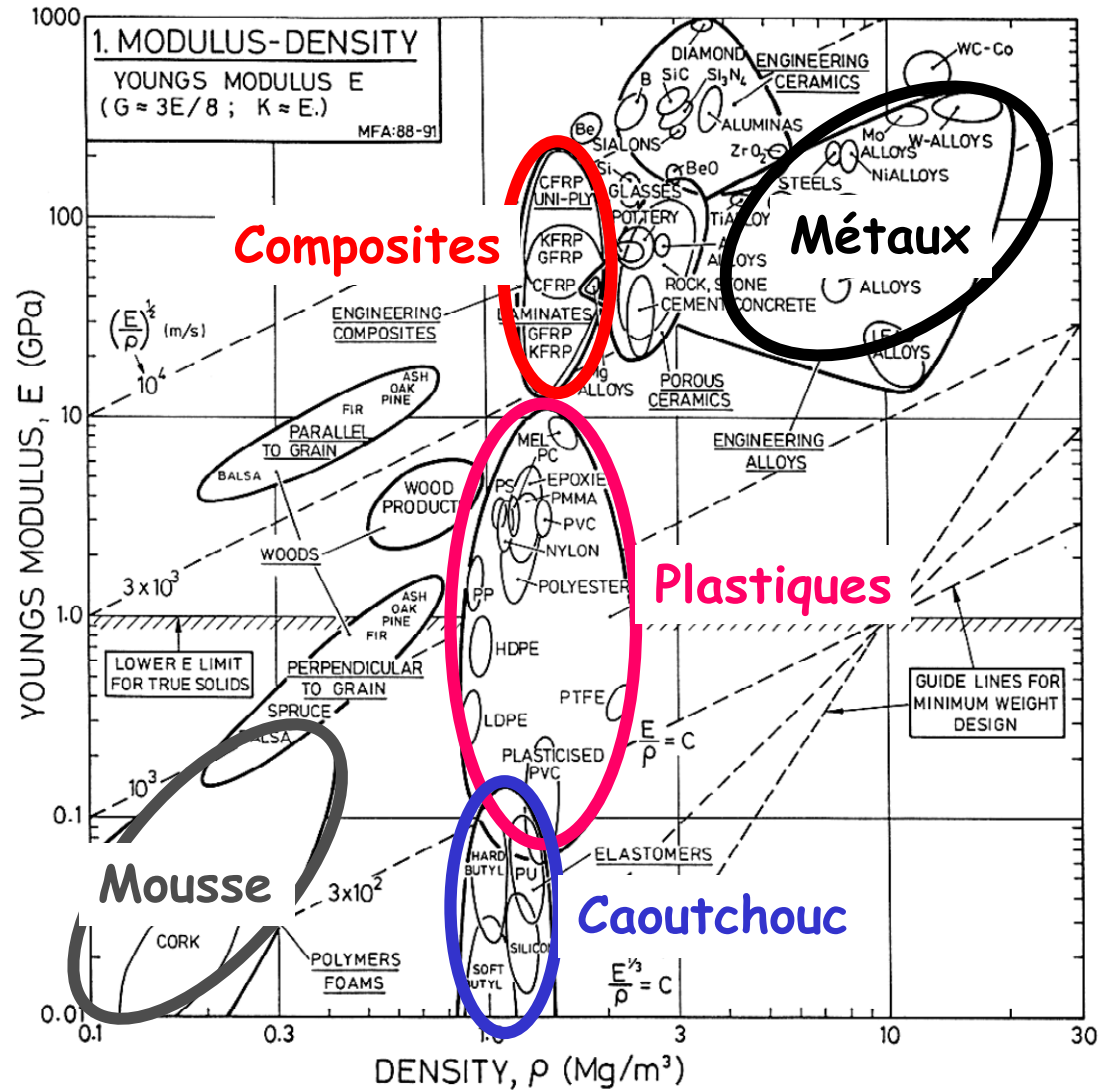
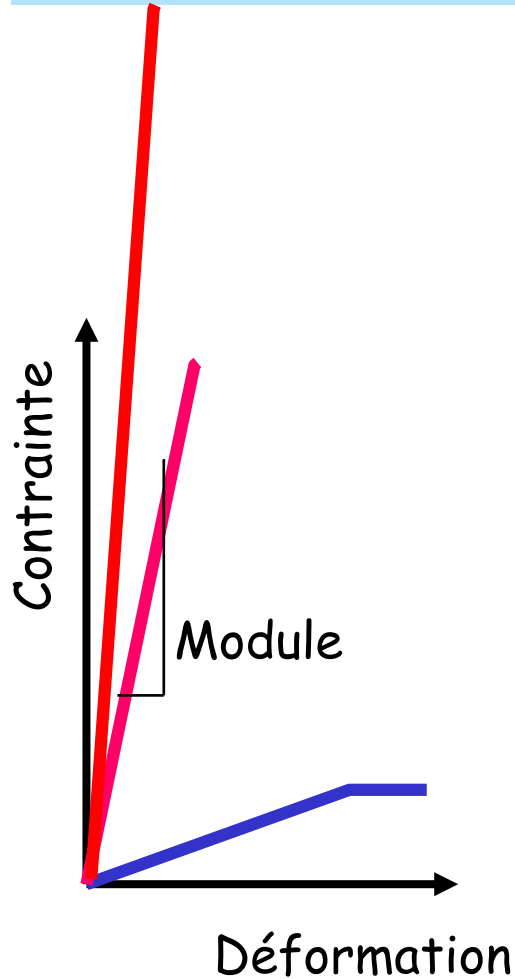
Engineering with fibre-polymer laminates  
P.C. Powell, Chapman & Hall, 1994

• <https://altairhyperworks.com/product/ESAComp>

• CoDA ou LAP sur <http://www.anaglyph.co.uk>

• [http://www.efunda.com/formulae/solid\\_mechanics/composites/calc\\_ufrp\\_abd\\_layout.cfm](http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/composites/calc_ufrp_abd_layout.cfm)

# Propriétés: module - densité



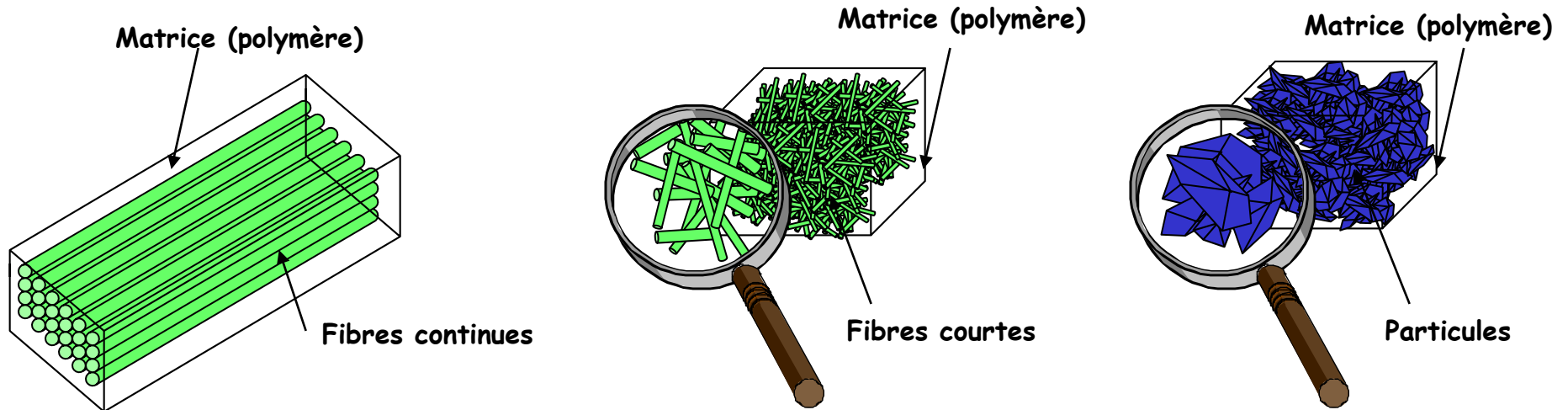
M.F. Ashby, Materials Selection for Mechanical design, Pergamon Press

# Propriétés des matériaux composites unidirectionnels

	METAUX			COMPOSITES A MATRICE ORGANIQUE			
	Ac35NDC16	Alliage Al	Alliage Ti	Bore époxy	Carbone HR époxy	Carbone HM époxy	Verre R époxy
<b>Module de Young E</b> (MPa)	200'000	72'000	110'000	220'000	130'000	200'000	53'000
<b>Résistance à la rupture en traction</b> $\sigma_r$ (MPa)	1850	500	1000	2000	1000 à 1300	1000	1800 à 2000
<b>Masse volumique <math>\rho</math></b> (g/cm <sup>3</sup> )	7.9	2.8	4.45	2.1	1.5	1.7	2
<b>Module spécifique</b> $E/\rho$ (MPam <sup>3</sup> /kg)	25	25	25	105	87	118	26
<b>Résistance spécifique</b> $\sigma/\rho$ (MPam <sup>3</sup> /kg)	0.24	0.18	0.23	0.95	0.65 à 0.85	0.60	0.90 à 1

Propriétés comparées de composites unidirectionnels avec 60% de fibres en volume

# Matériaux composites



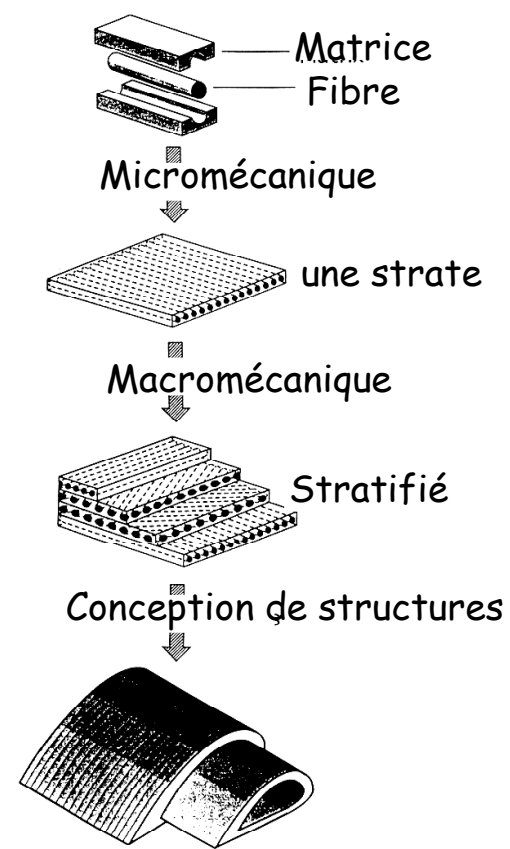
- Fibres orientées
- Composites unidirectionnels (UD)
- Thermodurcis, thermoplastiques
- Haute performance mécanique
- Anisotropie
- Aérospatiale, sport, réservoirs sous pression...

- Distribution de fibres courtes (< 3mm)
- Surtout des matrices thermoplastiques
- Isotropie
- Moulage par injection
- Mécanique, microtechnique, automobile....

- Particules (1-400 $\mu$ m), silice, argile...
- Thermodurcs and thermoplastiques
- Amélioration des propriétés
- Stabilité dimensionnelles
- Reduction de coût
- Moulage par injection, coulée
- Mécanique, microtechnique, dentisterie....

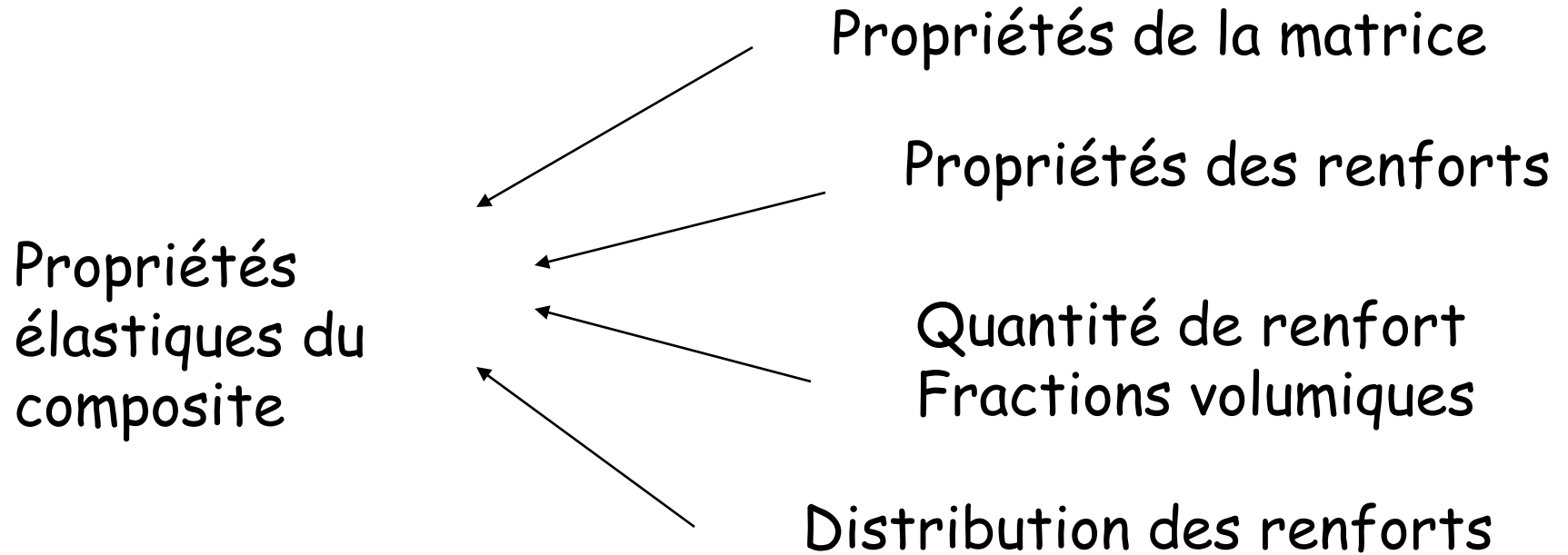
# Micromécanique

- Introduction
- Lois des mélanges
- Halpin-Tsai
- Renforts discontinus



Traité des Matériaux, Vol 15, chap 4 et 8

# Introduction





# Introduction

Polymère/ Interface/ renfort

Fractions volumiques et massiques

L'importance des fibres

Éléments de volume représentatif

# Fractions volumiques et massiques

$$V_f + V_m = 1$$

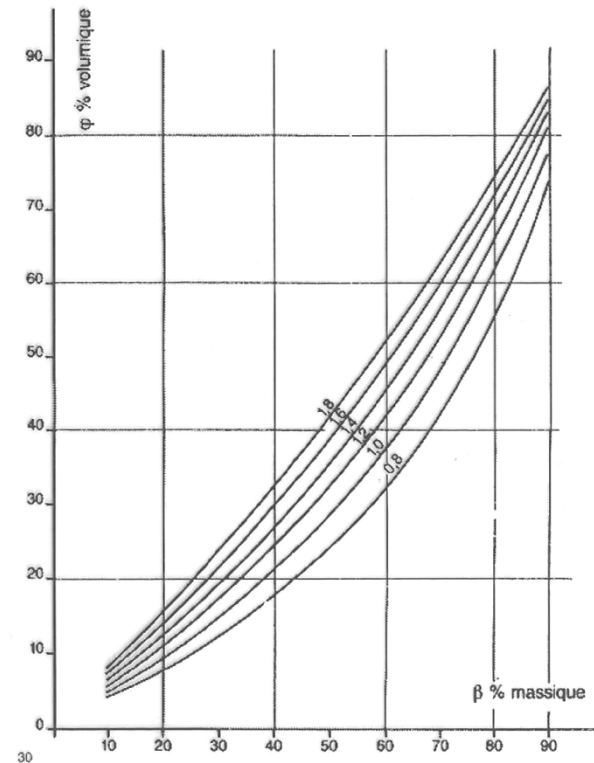
$$V_m = 1 - V_f$$

*!Hypo* :  $V_{porosité} \cong 0$

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m$$

$$M_f = \frac{\rho_f V_f}{\rho_f V_f + \rho_m V_m}$$

Correspondance % massique % volumique en fonction de la densité de la résine



# Importance des fibres

$$\frac{P_f}{P_m} \approx \frac{\sigma_f V_f}{\sigma_m V_m} \approx \frac{E_f V_f}{E_m V_m}$$

$$\frac{P_f}{P_c} \approx \frac{E_f V_f}{E_f V_f + E_m V_m}$$

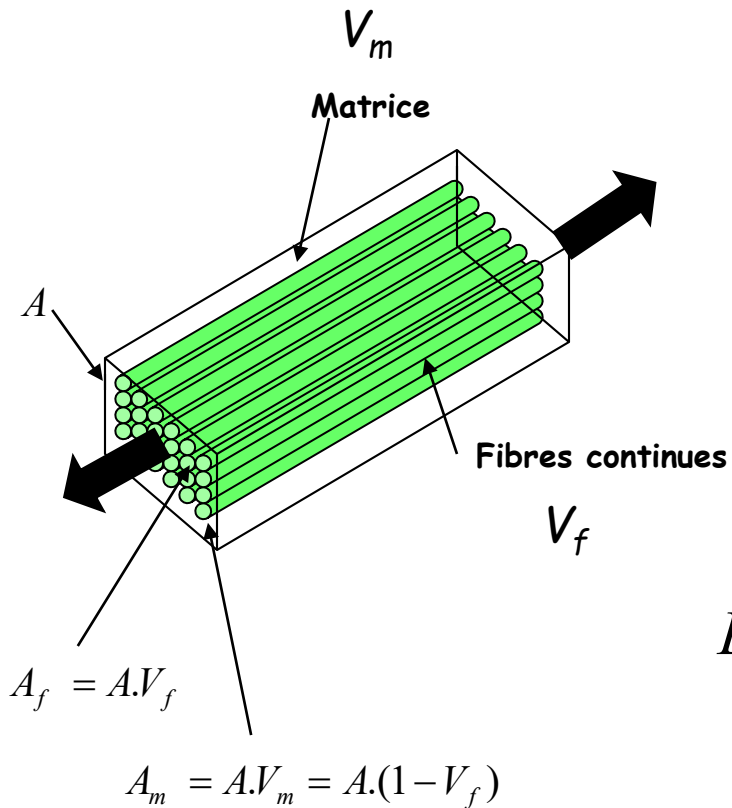
Module fibres de verre: 72 GPa  
Module matrice epoxy : 3.6 GPa

$V_f$	<b>0.1</b>	<b>0.5</b>
$\frac{P_f}{P_c}$	?	?

Module fibres de carbone: 430 GPa  
Module matrice epoxy : 3.6 GPa

$V_f$	<b>0.1</b>	<b>0.5</b>
$\frac{P_f}{P_c}$	?	?

# Fibres continues: propriétés longitudinales



$$F = F_f + F_m$$

avec  $\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_{cL}$

$$E_{cLongitudinal} = E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

# Fibres continues: propriétés longitudinales

Hypo1: interfaces parfaites

$$F = F_f + F_m$$

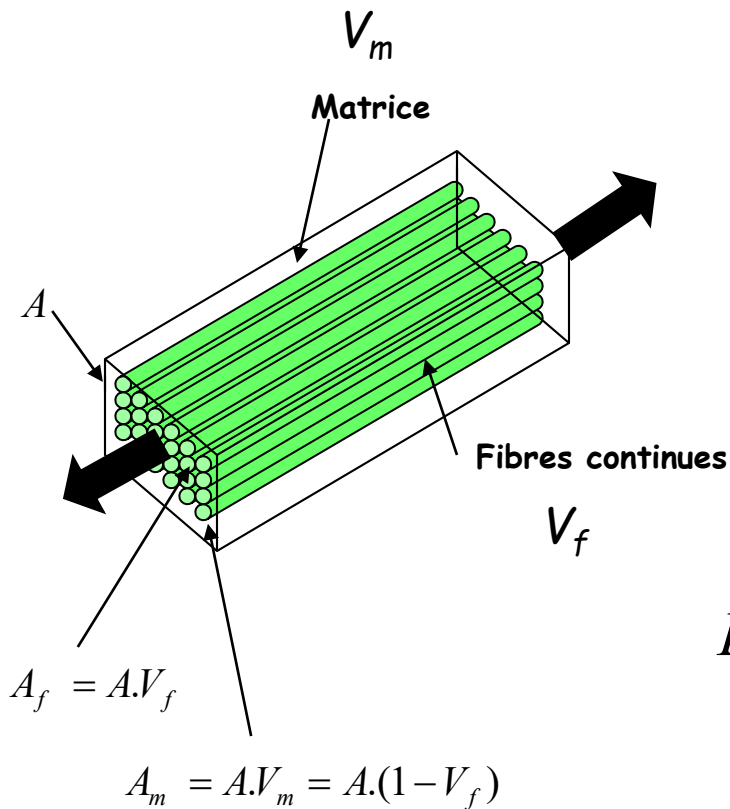
$$\sigma \cdot A = \sigma_f \cdot A \cdot V_f + \sigma_m \cdot A \cdot V_m$$

avec  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  Hypo2: mx élastiques linéaires

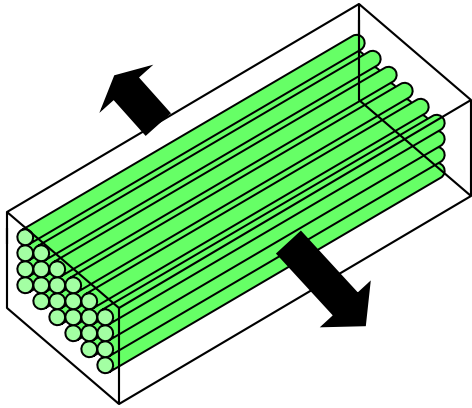
$$E_c \varepsilon_c = E_f V_f \varepsilon_f + E_m (1 - V_f) \varepsilon_m$$

avec  $\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_{cL}$  Hypo3: isodéformation

$$E_{cLongitudinal} = E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$



# Fibres continues: propriétés transversales



$$a = a_f + a_m$$

avec  $\sigma_f = \sigma_m = \sigma_{cT}$

$$E_{cT} = E_2 = \frac{E_m E_f}{E_f(1 - V_f) + E_m V_f}$$

# Fibres continues: propriétés transversales

Hypo1: interfaces parfaites

$$a = a_f + a_m$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f)$$

$$\text{avec } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

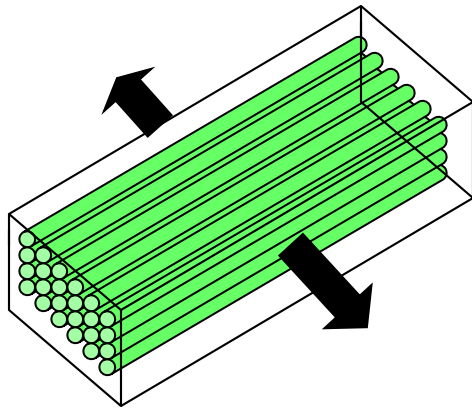
Hypo2: mx élastiques linéaires

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_f}{E_f} V_f + \frac{\sigma_m}{E_m} (1 - V_f)$$

$$\text{avec } \sigma_f = \sigma_m = \sigma_{cT}$$

Hypo3: isocontraintes

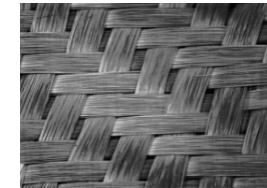
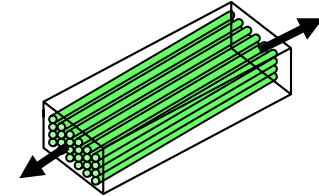
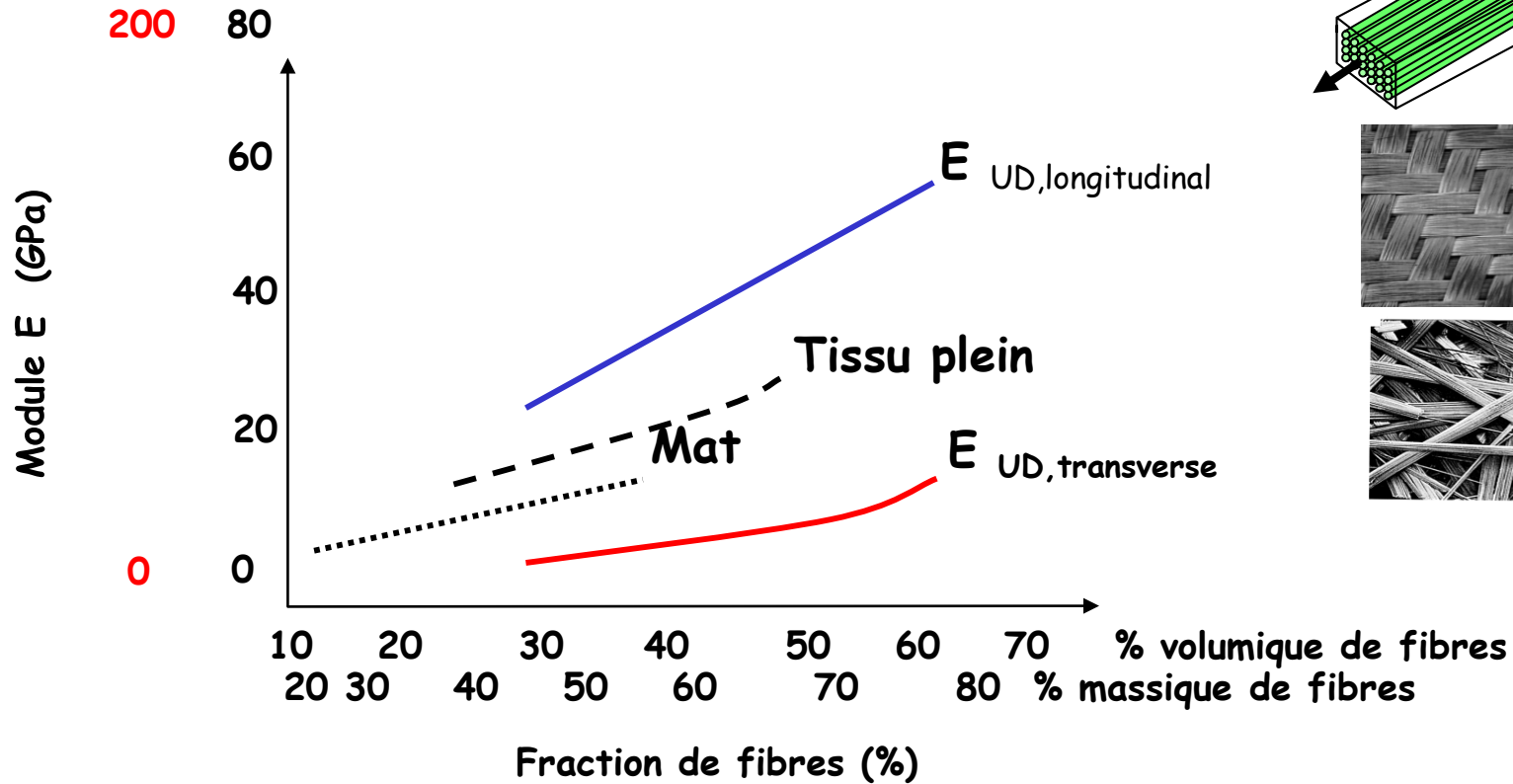
$$E_{cT} = E_2 = \frac{E_m E_f}{E_f (1 - V_f) + E_m V_f}$$



# Rigidités à volonté

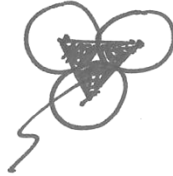
Fibres de carbone

Fibres de verre





empilement hexagonal



$$Af = 3 \cdot \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi r^2}{2}$$

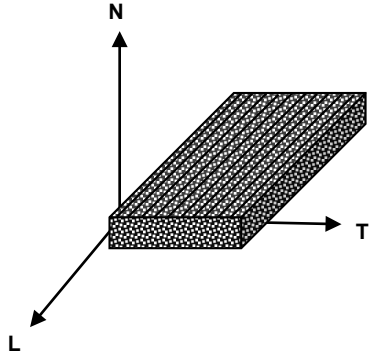


$$A = r \cdot 2r \sin \frac{\pi}{6} = r^2 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{f_{\max hwa}} = \frac{Af}{A} = \frac{\pi r^2}{2 r^2 \sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,9$$

$$\sqrt{f_{\text{cubique}}} = \frac{\pi r^2}{4 r^2} = 0,78$$

# Propriétés des composites unidirectionnels



	Verre S Epoxy	Kevlar 49 Epoxy	Carbone HR Epoxy	Carbone HM Epoxy	Bore Epoxy
<b>vf</b>	65 %	65 %	65 %	65 %	55 %
<b>Densité <math>\rho</math></b>	2.04 g/cm <sup>3</sup>	1.36 g/cm <sup>3</sup>	1.56 g/cm <sup>3</sup>	1.5 g/cm <sup>3</sup>	1.97 g/cm <sup>3</sup>
<b>E<sub>L</sub></b>	56 GPa	86 GPa	145 GPa	270 GPa	220 GPa
<b>E<sub>T</sub></b>	16 GPa	5.6 GPa	10 GPa	7 GPa	2.3 GPa
<b><math>\nu_{LT}</math></b>	0.26	0.32	0.29	0.3	0.26
<b>G<sub>LT</sub></b>	7 GPa	2.5 GPa	5.5 GPa	5.7 GPa	6.9 GPa
<b><math>\sigma_{rL}</math> traction</b>	1.75 GPa	1.5 GPa	1.2 GPa	0.95 GPa	1.3 GPa
<b><math>\sigma_{rT}</math> traction</b>	0.04 GPa	0.03 GPa	0.08 GPa	0.035 GPa	0.065 GPa
<b><math>\sigma_{rL}</math> compression</b>	0.9 GPa	0.28 GPa	1 GPa	0.75 GPa	2.85 GPa
<b><math>\sigma_{rT}</math> compression</b>	0.15 GPa	0.14 GPa	0.25 GPa	0.2 GPa	0.03 GPa
<b><math>\gamma_{rLT}</math> cisaillement</b>	0.06 GPa	0.05 GPa	0.1 GPa	0.055 GPa	0.06 GPa

# Equations de Halpin-Tsai

$$P = \frac{P_m (1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f}$$

$$\chi = \frac{P_f - P_m}{P_f + \xi P_m}$$

où  $P$  est la propriété étudiée ( $E_T$  ou  $G_{LT}$ ) et  $P_f$  et  $P_m$  sont respectivement les propriétés des fibres et de la matrice. Le paramètre  $\xi$  est déterminé empiriquement et définit l'efficacité du renforcement, en général  $\xi(E_T) = 2$  et  $\xi(G_{LT}) = 1$ .

# Coefficients d'expansion thermique

## Fibres anisotropes

# Résistance longitudinale lors de rupture de fibres continues alignées

$$\sigma_{c1}^R$$

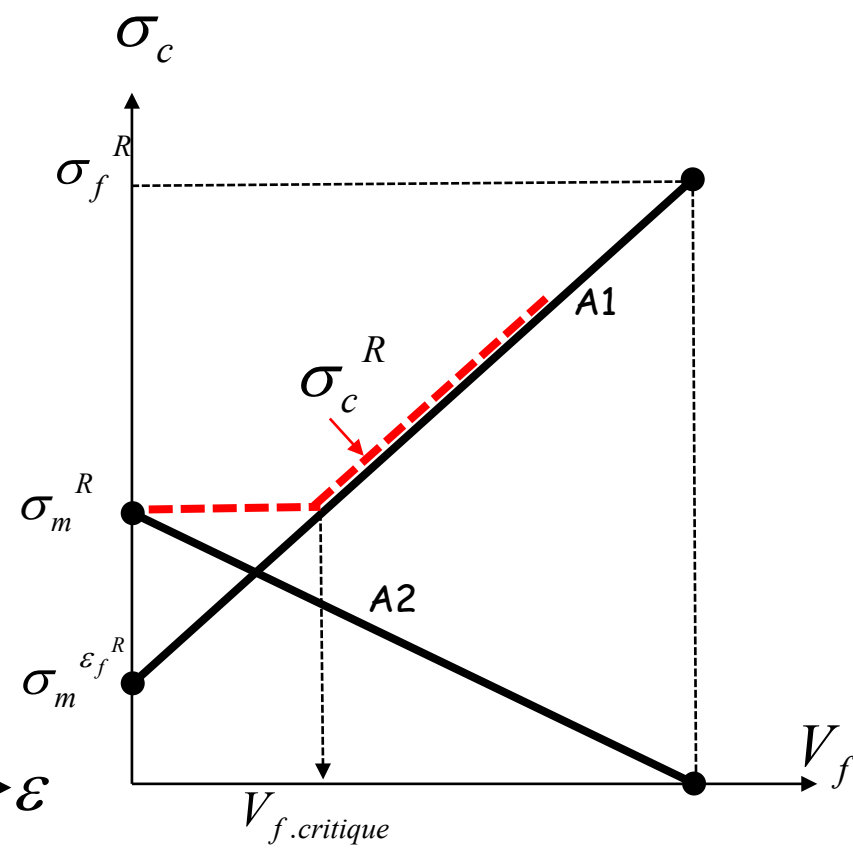
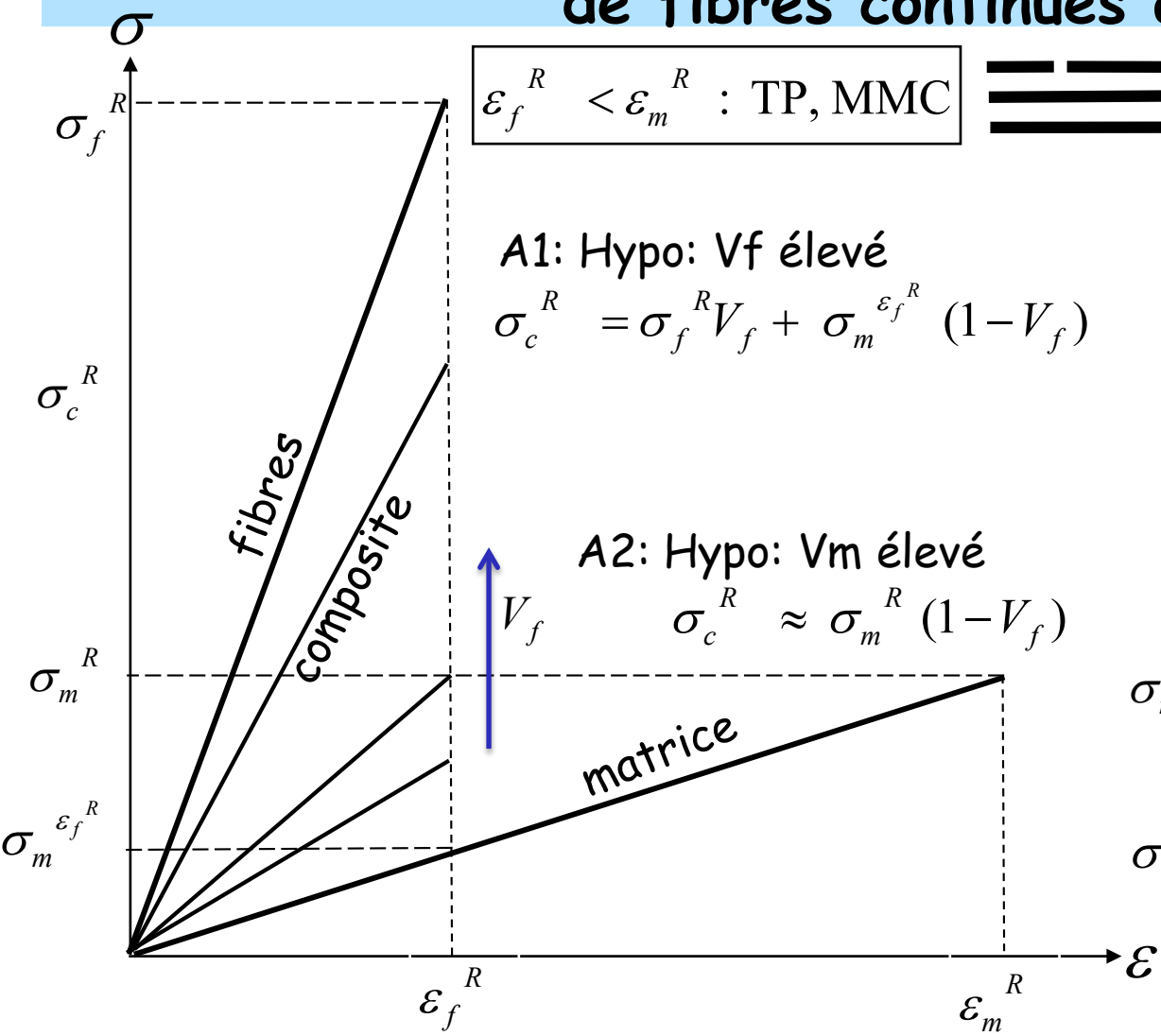
$\epsilon_f^R < \epsilon_m^R$  : TP, MMC



$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f)$$

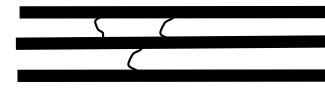
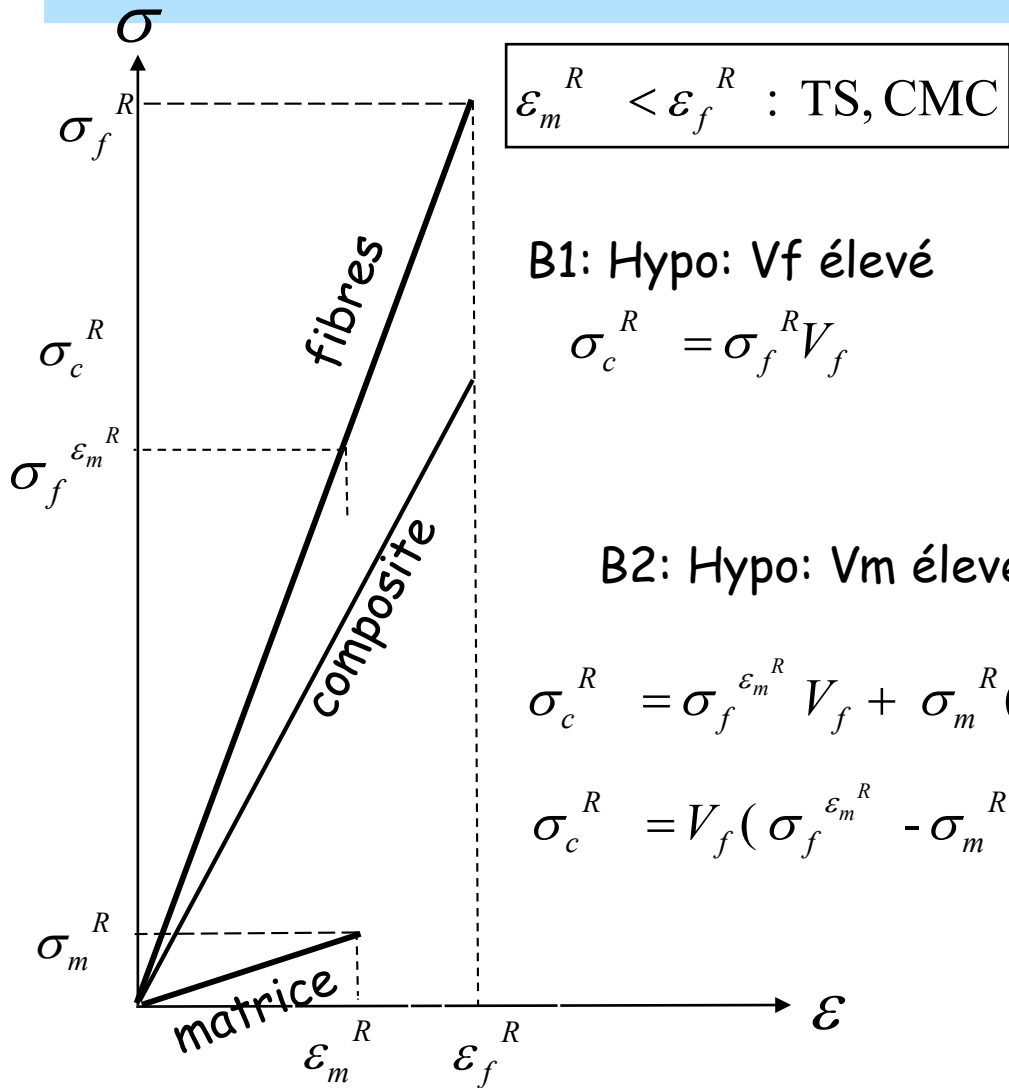
A1: Hypo:  $V_f$  élevé  
 $\sigma_c^R = \sigma_f^R V_f + \sigma_m^{\epsilon_f^R} (1 - V_f)$

A2: Hypo:  $V_m$  élevé  
 $\sigma_c^R \approx \sigma_m^R (1 - V_f)$



$$V_{f.critique} = \frac{\sigma_m^R - \sigma_m^{\epsilon_f^R}}{\sigma_f^R - \sigma_m^{\epsilon_f^R}}$$

# Résistance longitudinale lors de rupture de la matrice



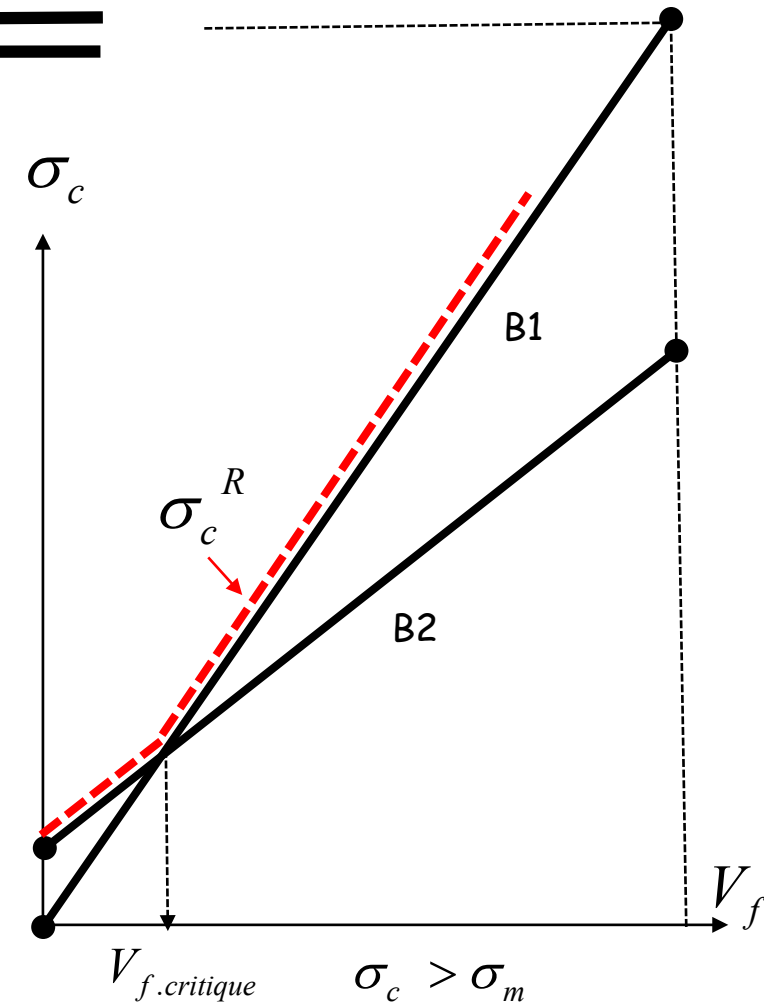
B1: Hypo:  $V_f$  élevé

$$\sigma_c^R = \sigma_f^R V_f$$

B2: Hypo:  $V_m$  élevé

$$\sigma_c^R = \sigma_f^{\varepsilon_m^R} V_f + \sigma_m^R (1 - V_f)$$

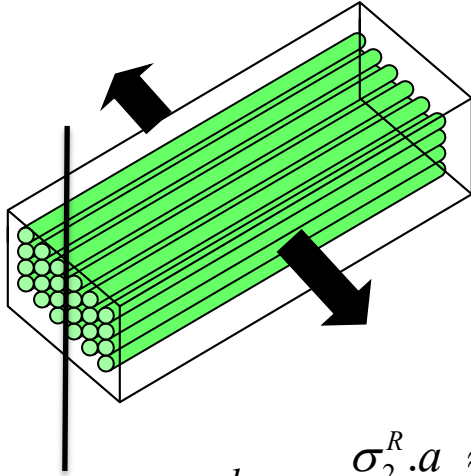
$$\sigma_c^R = V_f (\sigma_f^{\varepsilon_m^R} - \sigma_m^R) + \sigma_m^R$$



$$V_{f.critique} = \frac{\sigma_m^R}{(\sigma_f^R - \sigma_f^{\varepsilon_m^R}) + \sigma_m^R}$$

# Résistance transversale : Cooper-Kelly

$$\sigma_{c2}^R$$



$$\sigma_2^R \cdot a \approx \sigma_m \cdot (a - d_f)$$

Hypo1: résistance plus faible des interfaces

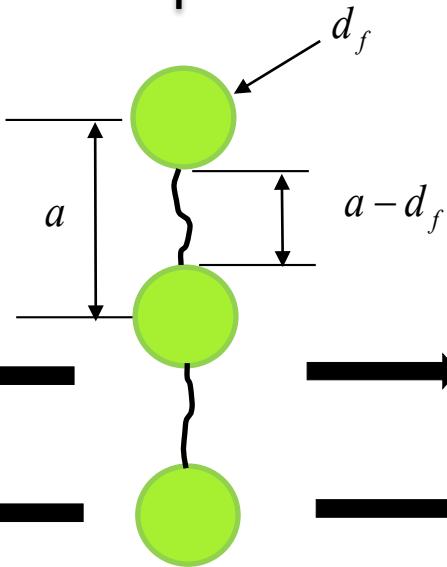
$$\frac{\sigma_2^R}{\sigma_m} \approx \frac{(a - d_f)}{a} = 1 - \frac{d_f}{a}$$

Hypo2: arrangement cubique

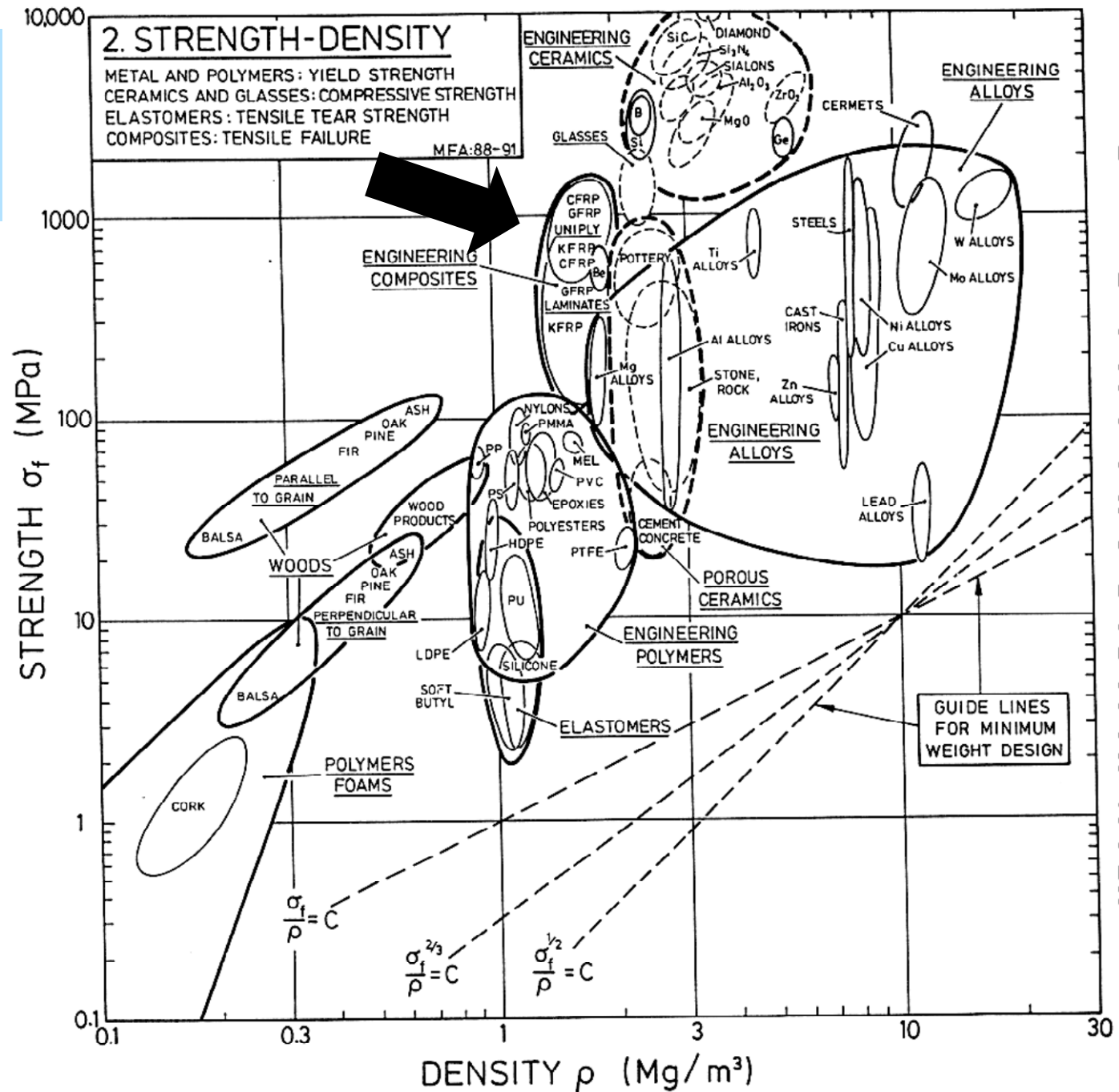
$$V_f = \frac{\pi \cdot d_f^2}{4a^2} \quad \text{donc} \quad \frac{d_f}{a} = \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}$$

$$\sigma_2^R = \sigma_m \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}\right)$$

si une résistance  $\sigma_i$  de l'interface existe :  $\sigma_2^R \approx \sigma_m \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}\right) + \sigma_i \cdot \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}$

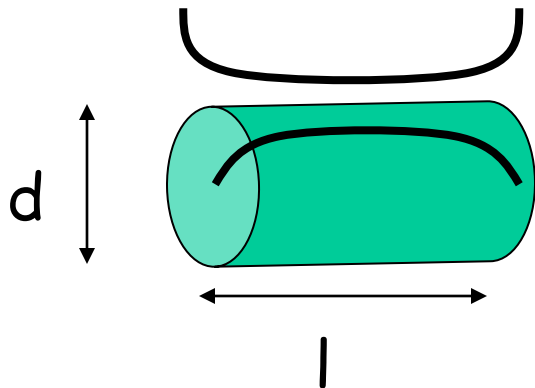
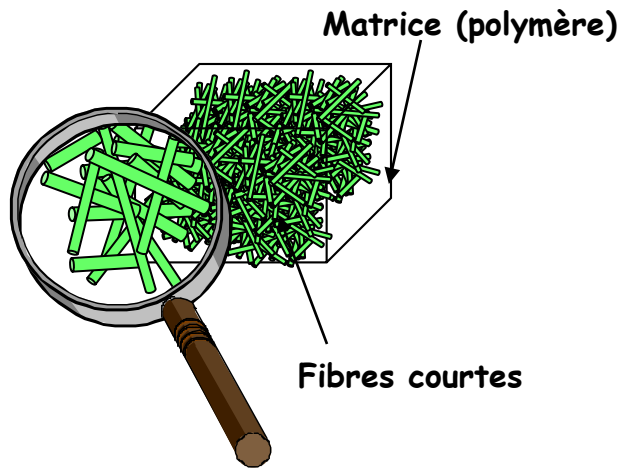


# Résistance spécifique





# Composites à fibres discontinues



Facteur de formes  $l/d$

Fraction volumique  $V_f$

Qualité des interfaces

Distribution statistique de l'orientation des fibres

Distribution de la longueur des fibres

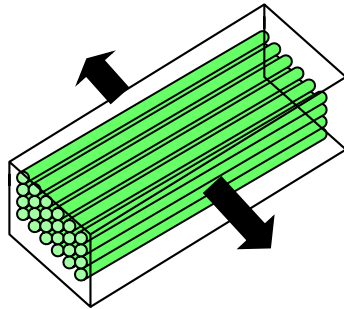
Halpin Tsai

$$E = \eta_{\text{orientation}} \eta_{\text{longueur fibre}} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

# Equations de Halpin-Tsai

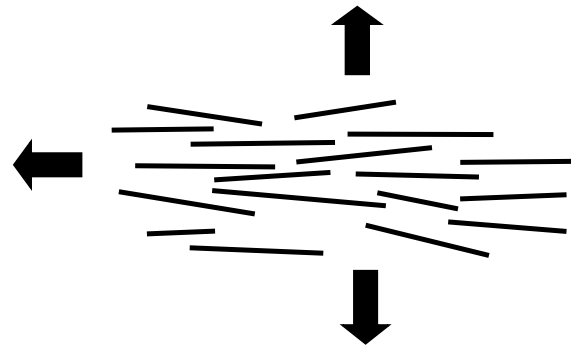
$$P = \frac{P_m (1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f}$$

$$\chi = \frac{P_f - P_m}{P_f + \xi P_m}$$



$$\xi(E_T) = 2$$

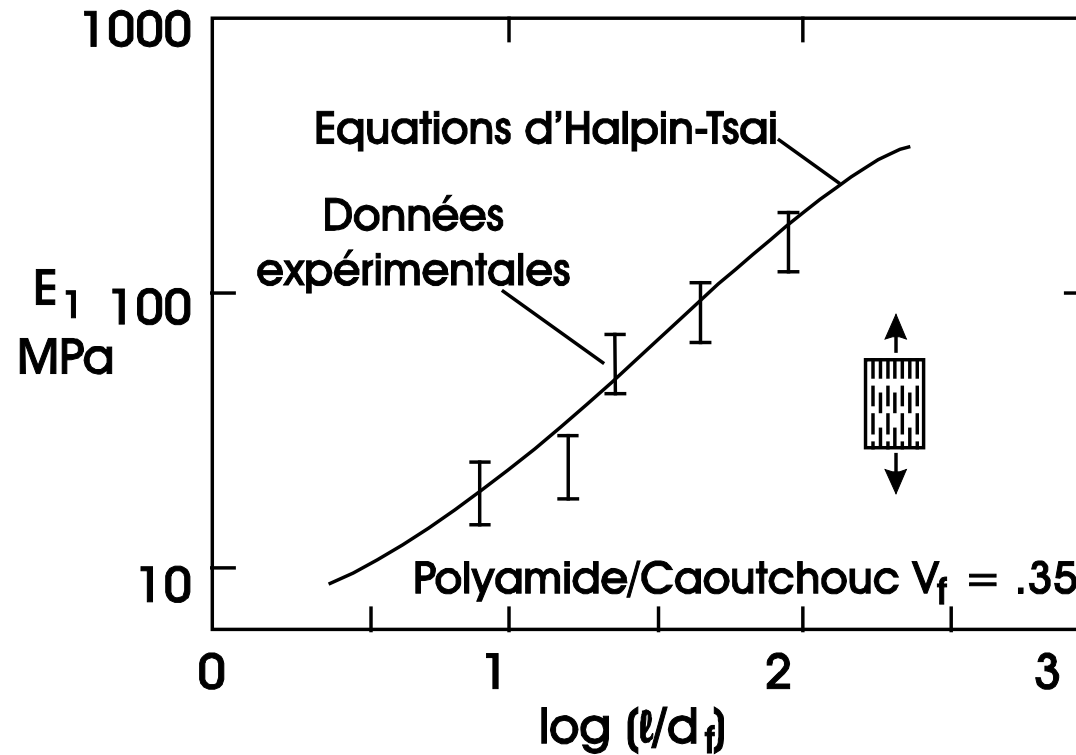
$$\xi(G_{LT}) = 1$$



$$\xi = 2 + 40 V_f^{10}$$

$$\xi = \frac{21}{d} + 40 V_f^{10}$$

# Composites à fibres courtes



$$\frac{\pi d_f^2}{4} [(\sigma + d\sigma) - \sigma] - \pi d_f \tau dx_1 = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{4\tau}{d_f} \quad \sigma(x_1) = \frac{4}{d_f} \int_0^{x_1} \tau dx_1$$

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{4c(u_f - u_m)}{d_f}$$

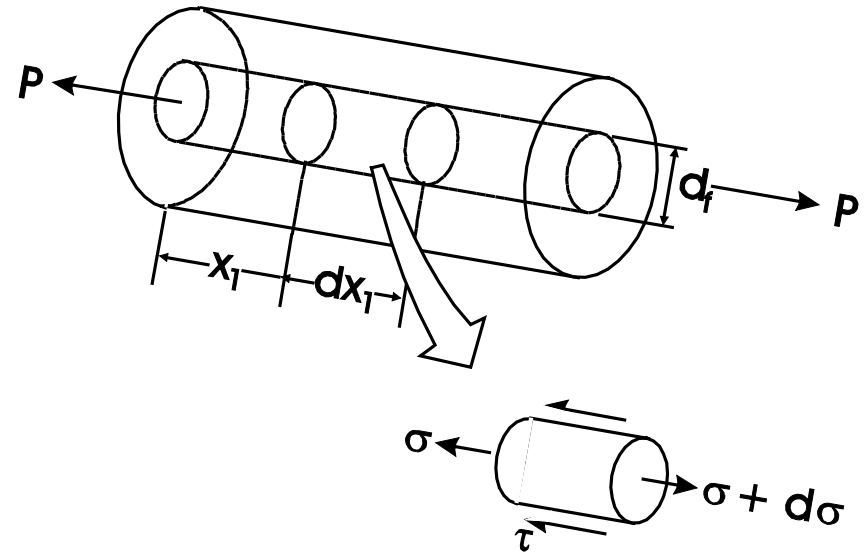
$$\frac{d^2\sigma}{dx_1^2} = \frac{4c}{d_f} \left( \frac{du_f}{dx_1} - \frac{du_m}{dx_1} \right)$$

$$\frac{du_f}{dx_1} = \frac{\sigma}{E_f}$$

$$\frac{du_m}{dx_1} = \varepsilon_m$$

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1^2} - \beta^2 \sigma = \frac{-4c}{d_f} \varepsilon_m \quad \text{avec} \quad \beta^2 = \frac{4c}{d_f E_f}$$

$$\sigma(x_1) = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\cosh \beta (\ell/2 - x_1)}{\cosh (\ell \beta/2)} \right]$$



# Composites à fibres courtes alignées

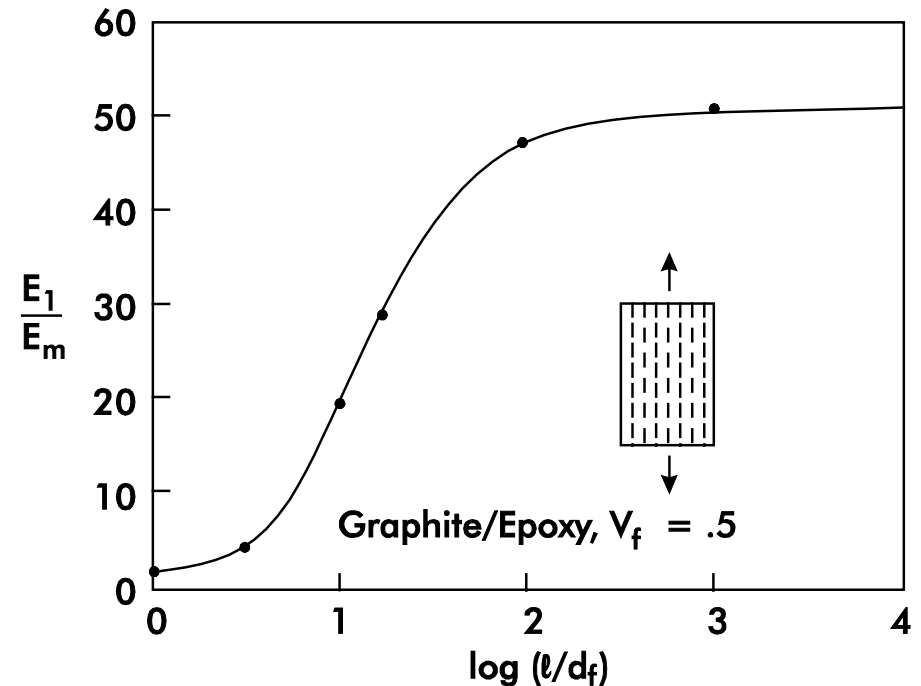
$$\sigma_f = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right]$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m$$

$$\sigma_c = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right] V_f + \sigma_m V_m$$

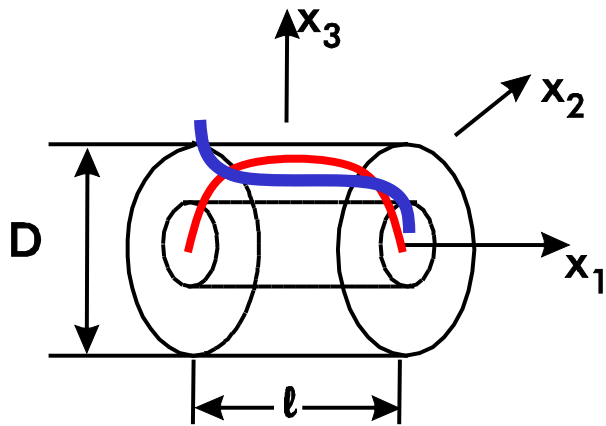
$$E_I = E_f V_f \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right] + E_m V_m$$

$$E = \eta_{\text{orientation}} \eta_{\text{longueur fibre}} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$



$l/d_f > 100$  : loi des mélanges

# Composites à fibres courtes alignées



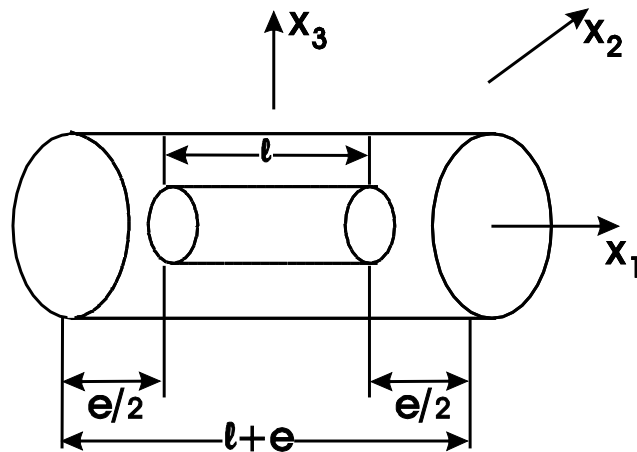
Cox

$$\tau = c(u_f - u_m)$$

$$E_I = E_f V_f \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right] + E_m V_m$$

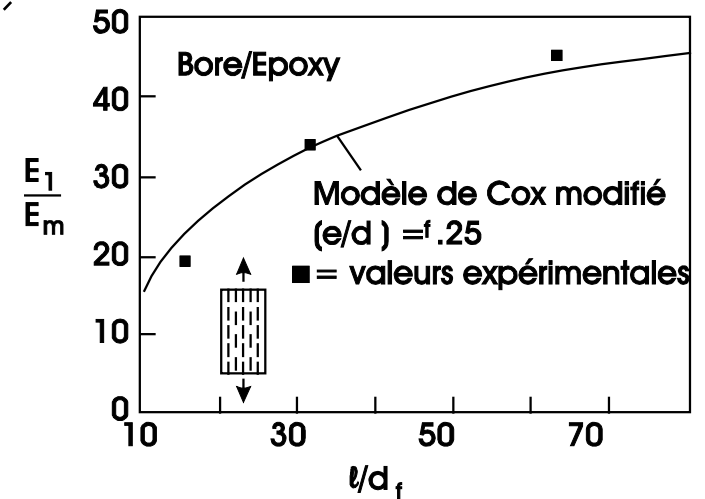
Cox-Kelly

$$\tau = \frac{d_f E_f \varepsilon_m \beta}{4} \left[ \frac{\sinh(\beta(l/2 - x_1))}{\cosh(\beta l/2)} \right]$$



Hwang-Gibson

$$\frac{1}{E_c} = \frac{l/(l+e)}{E_I} + \frac{e/(l+e)}{E_m}$$



# Composites à fibres courtes alignées

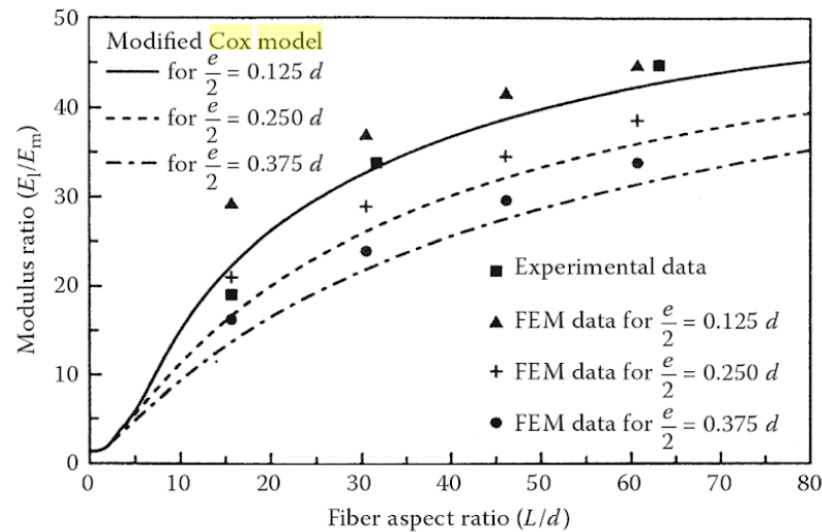
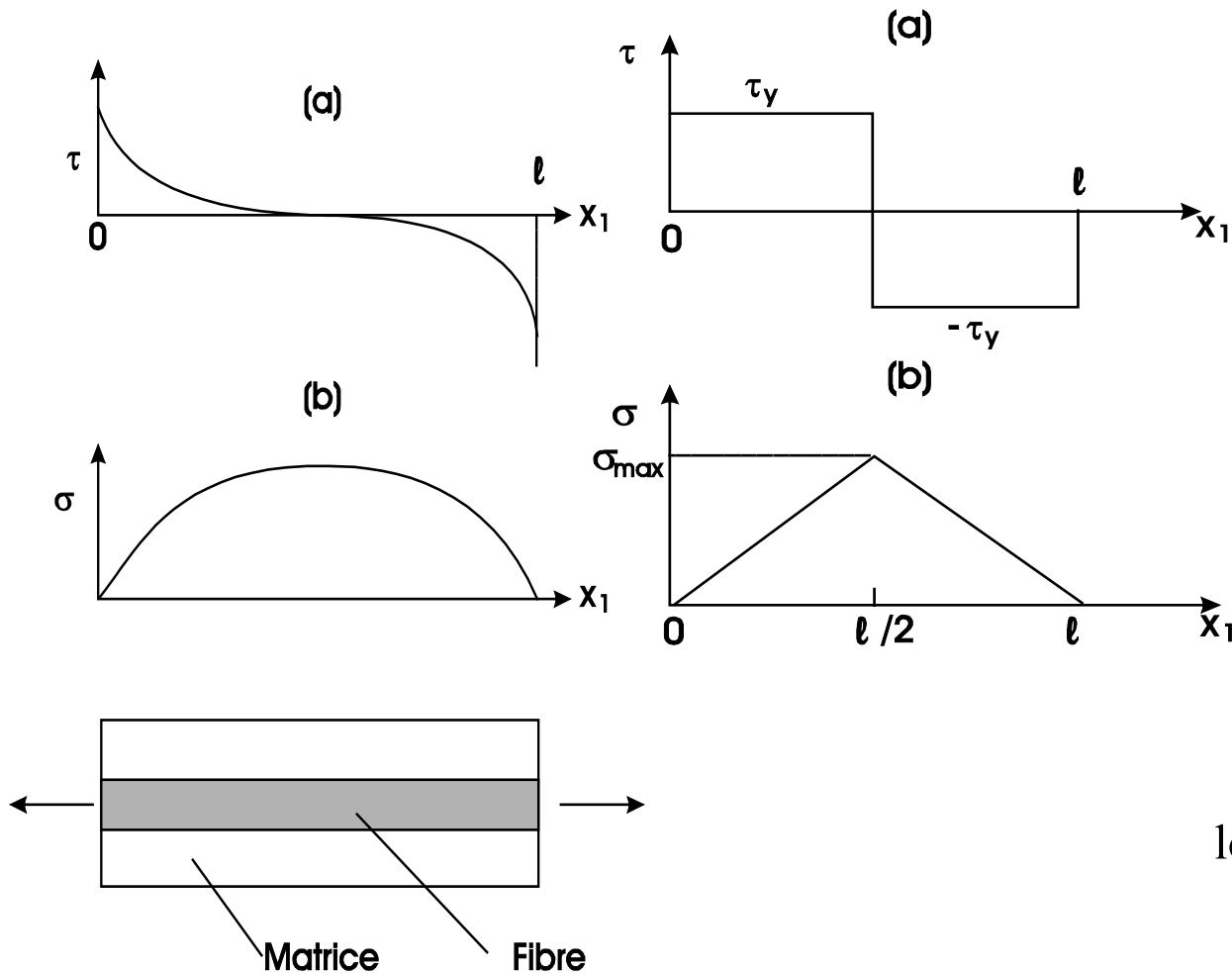


FIGURE 6.17

Comparison of predictions from the modified Cox model and FEA with experimental data for boron/epoxy-aligned discontinuous fiber composite at different fiber aspect ratios. (From Hwang, S. J. and Gibson, R. F. 1987. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 109, 47–52. Reprinted with permission from ASME.)

# Modèle de Kelly-Tyson



$$\tau = \tau_y = \text{cste}$$

$$\sigma = \frac{4}{d_f} \tau_y x_1$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{2 \tau_y \ell}{d_f}$$

La contrainte max dans les fibres augmente avec la longueur des fibres

$$\text{longueur critique} = \ell_c = \frac{d_f \sigma_{f, \text{ult}}}{2 \tau_y}$$

! Uniquement pour composites à fibres courtes

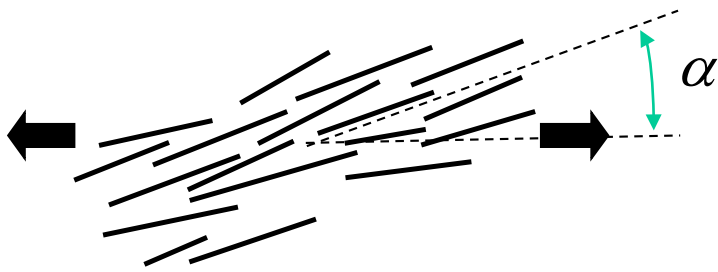


# Composites à fibres courtes orientées

$$E = \eta_{orientation} \eta_{longueur\ fibre} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

$p. =$

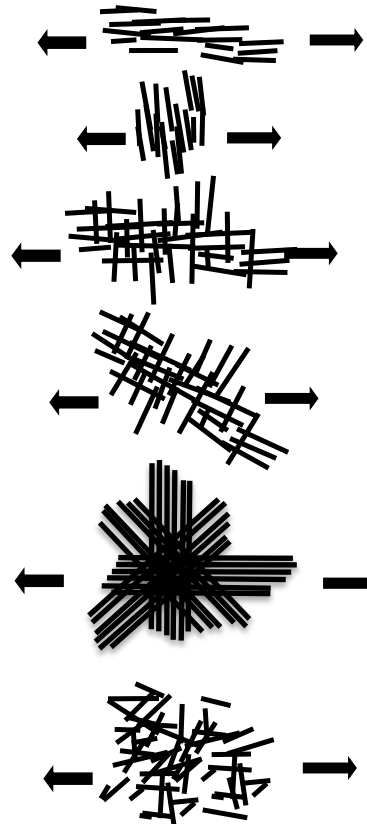
$\eta_o =$



$$\eta_{orientation} \approx \cos^4 \alpha$$

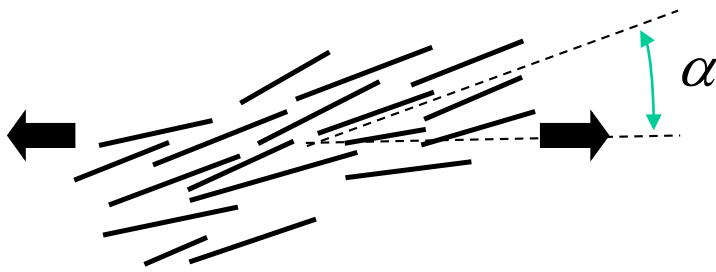
$$\eta_{orientation} \approx \sum_n p_n \cos^4 \alpha_n$$

$$\sum_n p_n = 1$$



# Composites à fibres courtes orientées

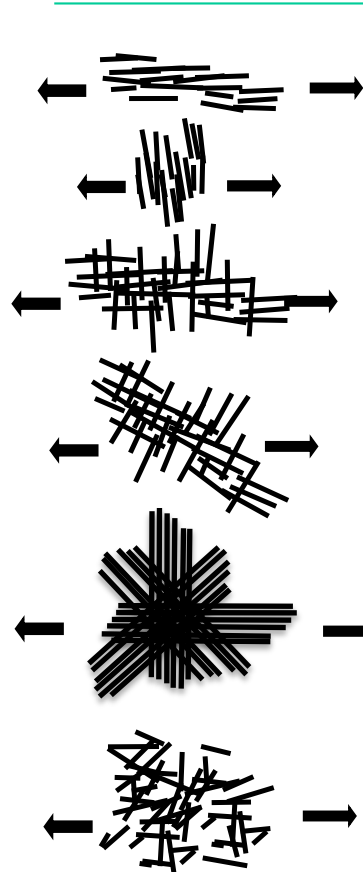
$$E = \eta_{\text{orientation}} \eta_{\text{longueur fibre}} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$



$$\eta_{\text{orientation}} \approx \cos^4 \alpha$$

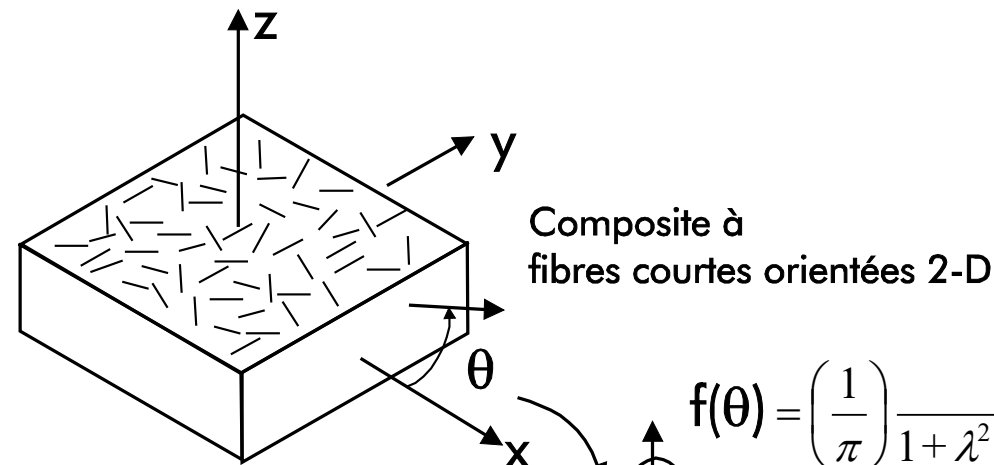
$$\eta_{\text{orientation}} \approx \sum_n p_n \cos^4 \alpha_n$$

$$\sum_n p_n = 1$$

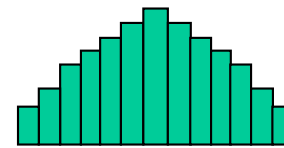
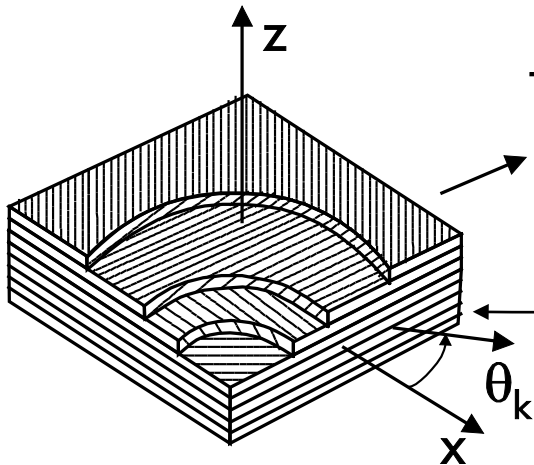


$p_n =$	$\eta_o =$
$p_n = 1$	$\eta_o = 1 \cos^4 0 = 1$
$p_n = 1$	$\eta_o = 1 \cos^4 90 = 0$
$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$	$\eta_o = \frac{1}{2} \cos^4 0 + \frac{1}{2} \cos^4 90 = \frac{1}{2}$
$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$	$\eta_o = \frac{1}{2} \cos^4 45 + \frac{1}{2} \cos^4 (-45) = \frac{1}{4}$
$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$	$\eta_o = \frac{1}{4} (\cos^4 0 + \cos^4 90 + \cos^4 45 + \cos^4 (-45)) = \frac{3}{8}$
Aléatoire 3dim	$\eta_o = \frac{1}{5}$
Aléatoire 2dim	$E = \frac{3}{8} E_0 + \frac{5}{8} E_{90}$

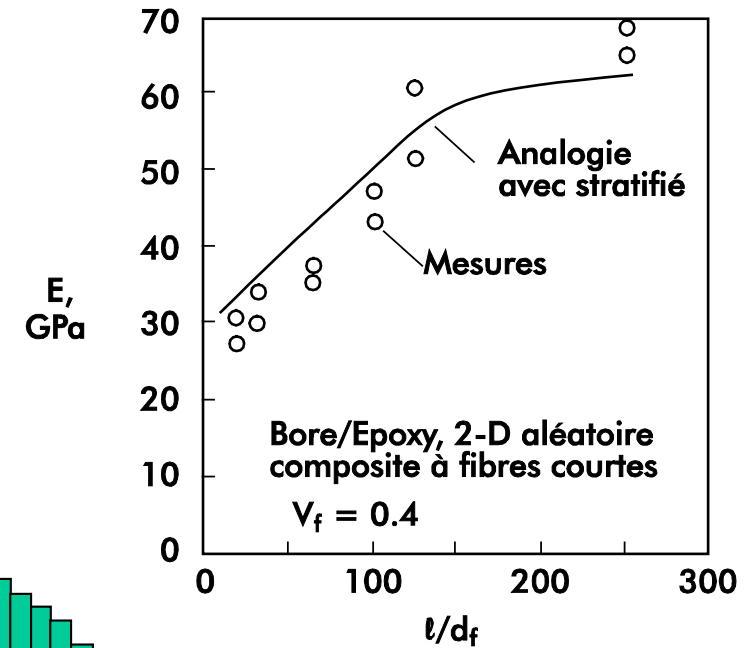
# Composites à fibres courtes orientées



$$f(\theta) = \left( \frac{1}{\pi} \right) \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(2\theta)}$$

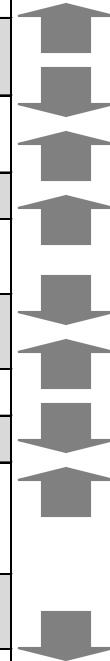


Cox ou Halpin-Tsai pour chaque strate  
puis théorie des stratifiés



# Propriétés des polymères chargés de fibres courtes

Propriété à 23°C	Zytel®		Zytel® 40% fibres courtes		Zytel® 50% fibres courtes	
	0 % HR	50% HR	0 % HR	50% HR	0 % HR	50% HR
Contrainte au seuil plastique $\sigma_y$ (MPa)	84 MPa	48 MPa	205 MPa	135 MPa	230 MPa	155 MPa
Allongement à la rupture $\varepsilon_y$ (%)	50 %	>300 %	3 %	6 %	2 %	5 %
Module de flexion E	2.7 GPa	0.9 GPa	10.5 GPa	6.5 GPa	23.5 GPa	8.5 GPa
Résistance au choc entaillé Izod	50 J/m	200 J/m	160 J/m	214 J/m	180 J/m	270 J/m
Résistance au choc Charpy	Pas de rupture		60 kJ/m <sup>2</sup>		65 kJ/m <sup>2</sup>	
Densité $\rho$	1.14 g/cm <sup>3</sup>		1.45 g/cm <sup>3</sup>		1.58 g/cm <sup>3</sup>	
Point de fusion	245°C		233 °C		233 °C	
Température de flexion sous charge de 1.8 MPa	65 °C		224 °C			
Absorbion d'eau en 24h (immersion)	1.6 %					
Retrait au moulage	1.3 %		0.18 %		0.16 %	



Comparaison des propriétés d'un copolymère PA66/6 (Nylon)  
non chargé et chargé avec des fibres courtes

