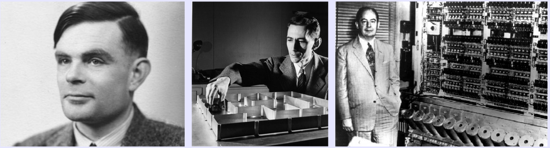

Information, Calcul et Communication

Compléments de cours

J.-C. Chappelier

EPFL

Leçons II.1 et II.2 (th. d'échantillonnage) – Points clés

- formule de reconstruction :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}(f_e\, t - m)$$

- théorème d'échantillonnage (dit « de Nyquist-Shannon »)
- effet stroboscopique / « repliement de spectre » ($\widetilde{f} = f_e - f$)
- filtrer *avant* d'échantillonner

Le théorème d'échantillonnage

Soient :

- $X(t)$ un signal de bande passante $f_{\max}$;
- $X(nT_e)$, $(n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonage f_e ;
- $X_I(t)$ donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Alors :

$$\text{Si} \quad f_e > 2\,f_{\max} \quad \text{alors} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et

$$\text{Si} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2\,f_{\max}$$

(c.-à-d. $\text{Si} \quad f_e < 2\,f_{\max} \quad \text{alors} \quad \text{il existe } t_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } X_I(t_0) \neq X(t_0)$)

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Que donne le filtrage du signal

$$X(t) = 8\sin(4\pi t) - 6\cos(8\pi t) + 7\cos(2\pi t)$$

par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 3$ Hz ?

$$\widehat{X}(t) = 8\sin(4\pi t) + 7\cos(2\pi t)$$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Un signal de bande passante 6000 Hz, mais ne contenant pas d'information pertinente au dessus de 3500 Hz est échantillonné à 8000 Hz après filtrage par un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c.

Pour que toute l'information pertinente reste dans le signal échantillonné :

*A] f_c doit être légèrement inférieure à 4000 Hz.

B] f_c doit être légèrement supérieure à 4000 Hz.

C] C'est de toutes façons impossible.

D] f_c doit être légèrement supérieure à 16000 Hz.

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Le signal

$$X(t) = \sum_{i=1}^{100} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

est échantillonné à une fréquence $f_e = 22$ Hz.

Avant d'être échantillonné, on lui applique un filtre passe-bas idéal de telle sorte que l'on soit sûr d'éviter tout phénomène de « repliement de spectre » (ou « effet stroboscopique »).

Quel signal X_l obtient-on après reconstruction à partir du signal échantillonné ?

$$X_l(t) = \sum_{i=1}^{5} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Soit X le signal défini par :

$$X(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Y(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

avec :

$$Y(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t)$$

et $T_e = 1/15$.
Quelle est une autre écriture correcte de X (pour tout t) ?

A] 0

B] $Y(0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right)$

C] $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$

*__D]__ $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t)$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Pour un signal $X(t)$ échantillonné à une fréquence f_e, puis reconstruit en un signal $X_I(t)$ (par la formule de reconstruction du cours).

Les affirmations suivantes sont elles vraie ou fausse ?

- Si f_e est trop faible, il est possible d'avoir des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $X_I(nT_e) \neq X(nT_e)$.
  Faux.
- $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si f_e est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.
  Vrai.
- La bande passante du signal $X_I(t)$ est égale à celle de $X(t)$, quelque soit f_e utilisée.
  Faux.
- Si $X_I(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f_e est nécessairement supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.
  Faux.