Applications Linéaires

Proposition 7.1. *Soit* $\varphi : V \mapsto W$ *une application lineaire avec* V *de dimension finie. Soit* $\mathscr{G} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_g\} \subset V$ *une famille generatrice alors* φ *est completement determinee par l'ensemble de images des elements de* $\mathscr{G}$*:*

$$\varphi(\mathscr{G}) = \{\varphi(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_g)\} \subset W.$$

En particulier, $\varphi(\mathscr{G})$ *est une famille generatrice de* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *et on a*

$$\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \leqslant \dim(V).$$

Définition 7.1. *Soit* $\varphi : V \mapsto W$ *une application lineaire. Le rang de* φ *est la dimension de* $\operatorname{Im}\varphi$*:*

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim \varphi(V)$$

Remarque 7.1.1. On a l'inegalite

$$\operatorname{rg}(\varphi) \leqslant \min(\dim V, \dim W).$$

Exercice 7.1. Soient V, W deux espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire. Montrer que

(1) Si φ est injective alors l'image par φ d'une famille libre est libre et
$$\dim(V) \leqslant \dim(W)$$
(2) Si φ est surjective alors l'image par φ d'une famille generatrice est generatrice et
$$\dim(V) \geqslant \dim(W).$$
(3) Si φ est bijective, l'image d'une base de V est une base de W et $\dim(V) = \dim(W)$.

Exercice 7.2. montrer qu'une application lineaire envoyant une base sur une base est un isomorphisme.

Thm Noyau-Image

Théorème 7.1 (Noyau-Image). *Soit* $\varphi : V \mapsto W$ *une application lineaire avec* V *de dimension finie. On a*

$$\dim V = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi).$$

Corollaire 7.1 (Critere de bijectivite). *Soit* $\varphi : V \mapsto W$ *une application lineaire entre espaces de dimension finie. Si*

$$\dim(V) = \dim(W)$$

alors est conditions suivantes sont equivalentes

(1) φ *est injective.*
(2) φ *est surjective*
(3) φ *est bijective.*

Formes linéaires

Dimension des espaces d'applications linéaires

V et W ds K-ev de dim $< \infty$

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{ \varphi : V \to W \ K\text{-linéaires} \}$$

a une structure de K-ev.

$$\varphi + \psi : v \to \varphi(v) + \psi(v) =: (\varphi + \psi)(v)$$

$$k.\varphi : v \to k.\varphi(v) =: (k.\varphi)(v)$$

Théorème 7.2 (Dimension de l'espace des applications lineaires). *Si V et W sont de dimension finie, alors $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ est de dimension finie*

$$\dim(\mathrm{Hom}_K(V,W)) = \dim V . \dim W.$$

<u>Preuve</u>: $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de V

$\mathcal{B}' = \{f_1, \ldots, f_{d'}\}$ une base de W

$\mathrm{eval}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow W^d \quad d = \dim V$

$\varphi \longmapsto (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_d))$

Cette application est linéaire :

$\forall\, i = 1 \ldots d$, $\lambda \in K$ $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$

$$(\lambda\varphi + \psi)(e_i) = \lambda . \varphi(e_i) + \psi(e_i)$$

en considérant les $(e_i \; i = 1 \ldots d)$

$$\mathrm{eval}_B(\lambda\varphi + \psi) = \lambda\, \mathrm{eval}_B(\varphi) + \mathrm{eval}_B(\psi)$$

comme φ est déterminée par

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

$eval_B$ est injective.

Cette application est surjective ?
(donc un isomorphisme)

soit $(w_1, \dots\dots, w_d) \in W^d$

soit φ l'application $\varphi : V \to W$

definie par : $v = x_1 e_1 + \dots\dots + x_d e_d$

$$\varphi(v) = x_1 . w_1 + x_2 w_2 + \dots\dots + x_d . w_d$$

φ est lineaire et $\varphi(e_i) = w_i$

$$\Longrightarrow \mathrm{eval}_B(\varphi) = (w_1, \dots, w_d)$$

$$\mathrm{eval}_B : \mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{\sim} W^d$$

$$\dim \mathrm{Hom}_K(V, W) = \dim(W^d) = d \cdot \dim W$$

$$W^d = \underbrace{W \times W \times \dots \times W}_{d \text{ fois}} \quad \left(\begin{array}{l} \dim X \times Y \\ = \dim X + \dim Y \end{array} \right)$$

DÉFINITION 7.4. *On note l'espace des formes lineaires* $\ell : V \mapsto K$,

$$V^* := \mathrm{Hom}_{K-ev}(V, K)$$

et on l'appelle le dual de V.

$\dim K = 1$

$\dim V^* = \dim V \times 1 = \dim V$

V et V^* sont isomorphes.

DÉFINITION 7.5. *Soit* $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ *une base de* V, *si* $v \in V$ *s'ecrit*

$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d$$

le scalaire x_i *est la i-eme coordonnee de* v *dans la base* $\mathscr{B}$. *On note ce scalaire*

$$x_i = \mathbf{e}_i^*(v).$$

PROPOSITION 7.3. *L'application* $v \in V \mapsto \mathbf{e}_i^*(v) \in K$ *est une forme lineaire . On l'appelle la i-ieme forme lineaire coordonnee relative a la base* $\mathscr{B}$ *de* V.

Preuve: v et $v' \in V$ $\lambda \in K$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \qquad v' = x'_1 e_1 + \dots + x'_d e_d$$

$$\lambda v + v' = \lambda(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d) + x'_1 e_1 + \dots + x'_d e_d$$

$$= (\lambda x_1 + x'_1) e_1 + \dots + (\lambda x_d + x'_d).e_d$$

$i=1,\dots,d$ la ieme coord de

$$\lambda v + v' = \lambda x_i + x_i'$$

$$e_i^*(\lambda v + v') = \lambda e_i^*(v) + e_i^*(v')$$

$\square$

etant une base B de V

$B = \{e_1, \dots, e_d\}$ on lui associe

une famille de d forme lineaires

$B^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ (les d fonctions coordonnées ds la base B)

$\cap$

V^*

THÉORÈME 7.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de V, la famille*

$$\mathscr{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

est une base de V^*. On a

$$\forall i, j \leqslant d,\ \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i=j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}.$$

DÉFINITION 7.5. *La base*

$$\mathscr{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

s'appelle la base duale de la base $\mathscr{B}$.

Preuve: pour mq B^* est une base il suffit de mq ou bien B^* est libre ou bien B^* est generatrice ou bien les deux.

Soit $i, j = 1, \dots, d$

$e_i^*(e_j) =$ la ieme coord du vecteur e_j ds la base $\{e_1, \dots, e_d\}$

$$e_j = 1.e_j + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq j}}^{d} 0.e_{i'}$$

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Mq B^* est libre.

Soit $\ell = x_1 e_1^* + \dots + x_d e_d^* \in V^*$

tq $\ell = \underline{0}_K$ on veut mq $x_1 = \dots = x_d = 0$

Calculons

$$\ell(e_j) = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i^*(e_j) = x_1 e_1^*(e_j) + \dots + x_d e_d^*(e_j)$$

$$\ell(e_j) = x_j e_j^*(e_j) = x_j$$

mais $\ell(e_j) = 0$ (car $\ell = \underline{0}_K$)

$j = 1 \dots d \quad x_j = 0$

B^* est libre donc est une base de V^*

Corollaire 7.2. *Soit $\ell : V \mapsto K$ une forme lineaire. On a*

$$\ell = \sum_{i=1}^{d} \ell(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i^*.$$

Autrement dit, les coordonnees de ℓ dans la base $\mathscr{B}^*$ sont donnees par les $(\ell(\mathbf{e}_i))_{i\leqslant d}$ (ie. les valeurs de ℓ en chacun des $\mathbf{e}_i$, $i \leqslant d$).

Preuve: On sait B^* est generatrice

$$\ell = x_1 e_1^* + \dots + x_d e_d^*$$

$$\ell(e_j) = x_1 e_1^*(e_j) + \quad + x_j e_j^*(e_j) + \dots + x_d e_d^*(e_j)$$

$$\ell(e_j) = 0 \quad .. \; 0 + x_j \cdot 1 + \quad 0 \quad 0$$

$l(e_j)$ = j-eme cooordonnée de
l ds la base B^*

$$B^* = \{e_1^*, \ldots, e_d^*\}$$

V^* possede une base B^* et donc

$$\mathrm{Hom}_K(V^*, K) = (V^*)^* = V^{**}$$

$$B^{**} = \{ e_1^{**}, \dots, e_d^{**} \}$$

$j = 1 \dots d$

$$e_j^{**}(\ell) = \ell(e_j)$$

j-ème coord de ℓ ds la base B^*.

$V^{**} = (V^*)^* =$ bidual de V

$$V \simeq V^{*} \simeq V^{**}$$

$$V \simeq V^{**} \qquad V^{***} \simeq V^{*}$$

<u>Ex</u>: il existe un isomorphisme entre V et V^{**} qui ne dépend pas du choix de la base B.

Rmq: D'où sort la base duale B^*

Représentations de

SEV

Paramétrique : $W \subset V$

Soit $\mathcal{G} \subset W$ une famille génératrice de W : $\forall w \in W$ il existe des scalaires

$\left[\left[\mathcal{G} = \{w_1, \dots, w_g\} \subset W \right]\right]$

$x_1, \dots, x_g$ tq $w = x_1 w_1 + \dots + x_g w_g$

tout vecteur peut être representé

par la donnee d'un g-uple de scalaires

$(x_1, \dots, x_g)$

les parametre decrivent W

$$CL_g : \begin{aligned} K^g &\longrightarrow W \\ (x_1, \dots, x_g) &\longrightarrow w = x_1 w_1 + \dots + x_g w_g \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Representation parametrique de W.

Rmq: si G est une base de W
la representation est unique.

Proposition 7.4 (Representation cartesienne d'un SEV). *Soit $W \subset V$ un SEV (distinct de V). Il existe un entier $d' \geqslant 1$ et une famille de d' formes lineaires*

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_{d'}\} \subset V^*$$

telles que

$$W = \{w \in V \text{ tels que } \ell_1(w) = 0,\ \ell_2(w) = 0, \cdots \ell_{d'}(w) = 0\}.$$

De maniere equivalente, $W = \ker \varphi_{\mathcal{L}}$ avec

$$\varphi_{\mathcal{L}} : w \in V \mapsto (\ell_1(w), \cdots, \ell_{d'}(w)) \in K^{d'}.$$

En fait on peut prendre $d' = d_V - d_W$ et la famille

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_{d_V - d_W}\} \subset V^*$$

forment une famille libre de V^* (ie. les ℓ_i, $i \leqslant d_V - d_W$ sont lineairement independantes).

Preuve: Soit $B_W = \{e_1, \ldots, e_{d_W}\}$ une base de W $(d_W = \dim W)$

On peut compléter B_W en une base de V

$B = \{e_1, \ldots, e_{d_W}, e_{d_W+1}, \ldots, e_d\}$ $d = \dim V$

et $B^* = \{e_1^*, \dots, e_{d_W}^*, e_{d_{W+1}}^*, \dots, e_d^*\}$

W = l'ensemble des vect de V qui sont CL des $e_1, \dots, e_{d_W}$ (et pas de $e_{d_{W+1}}, \dots, e_d$)

$= \{w \in V \text{ tq } e_{d_{W+1}}^*(w) = 0 = \dots = e_d^*(w)\}$

$\square$

<u>Rmq</u>: Si $W = \{ w \in V \text{ tq } \ell_1(w) = \dots = \ell_{d'}(w) = 0 \}$

alors on peut mq

$$d' \geq \dim V - \dim W.$$

(Conséquence du Thm Noyau-Image)

$$W = \{ w \in V \text{ tq } \ell_1(w) = \dots = \ell_{d'}(w) = 0 \}$$

$\ell_i : V \to K$ forme linéaire.

$$\alpha = \{ \ell_1, \dots, \ell_{d'} \} \subset V^*$$

$$\begin{aligned} \mathrm{eval}_\alpha : V &\longrightarrow K^{d'} \\ v &\longmapsto (\ell_1(v), \dots, \ell_{d'}(v)) \end{aligned}$$

est linéaire

et par hypothèse

$$\ker(\mathrm{eval}_\alpha) = W$$

Thm Noyau-Image

$$\dim V = \dim \ker(\mathrm{eval}_\alpha) + \dim \mathrm{eval}_\alpha(V)$$

$$\dim V = \dim W + \dim \mathrm{eval}_\alpha(V)$$

$$\dim V - \dim W = \dim(\text{év}_\alpha(V)) \leq d'.$$

$\square$

E $\mathbb{Q}^3$ $W = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,3))$

donner une rep cartesienne de W.

Base de $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Applications linéaires élémentaires

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\} \subset V$ base

$\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_{d'}\} \subset W$ base

$\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\} \subset V^*$ base duale.

⚠ $i=1,\dots,d'$ $\quad j=1,\dots,d$ on defini

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ij} : V &\longrightarrow W \\ v &\longrightarrow e_j^*(v)\cdot f_i \end{aligned}$$

si $v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$

$$\mathcal{E}_{ij}(v) = x_j \cdot f_i$$

LEMME 7.1. *L'application $\mathcal{E}_{ij} : V \mapsto W$ est lineaire, de rang 1, d'image $K.\mathbf{f}_i$ et de noyau*

$$\ker \mathcal{E}_{ij} = \langle \mathscr{B} - \{\mathbf{e}_j\} \rangle = K.\mathbf{e}_1 + \cdots + K.\mathbf{e}_{j-1} + K.\mathbf{e}_{j+1} + \cdots + K.\mathbf{e}_d$$

l'hyperplan vectoriel engendre par les vecteur de la base $\mathscr{B}$ moins le vecteur $\mathbf{e}_j$.

Preuve:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ij}(\lambda v + v') &= e_j^*(\lambda v + v').f_i \\ &= (\lambda e_j^*(v) + e_j^*(v')).f_i \\ &= \lambda e_j^*(v) f_i + e_j^*(v').f_i = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \mathcal{E}_{ij}(v) \\ + \mathcal{E}_{ij}(v') \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{ij}(V) \subset K.f_i \quad \text{et}$$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{E}_{ij}(V) \leq 1$$

$$\mathcal{E}_{ij}(e_j) = e_j^*(e_j).f_i = f_i \neq 0_W$$

$$\dim \mathcal{E}_{ij}(V) \geq 1 \ . \quad \mathcal{E}_{ij}(V) = K.f_i$$

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{E}_{ij} = \dim V - 1$$

$$e_j^i(v) \cdot f_i = 0_W \text{ ssi } e_j^i(v) = 0_K$$

$$\Longleftrightarrow v \in Ke_1 + \dots + Ke_{j-1} + Ke_{j+1} + \dots + Ke_d.$$

$$\square$$

DÉFINITION 7.7. *Soit V, W des K-EV de dimensions finies d, d' et*

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \text{ et } \mathscr{B}' = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_{d'}\}$$

des bases de V et W et $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ la base duale de $\mathscr{B}$.

Pour $i \leqslant d'$, $j \leqslant d$ les applications lineaires definies par

$$\mathcal{E}_{i,j} : v \in V \mapsto \mathbf{e}_j^*(v).\mathbf{f}_i \in W$$

sont appellees applications lineaires elementaires associees aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

THÉORÈME 7.4 (Une base de l'espace des applications lineaires). *La famille des applications lineaires elementaires*

$$\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} := \{\mathcal{E}_{ij},\ i \leqslant d',\ j \leqslant d\} \subset \mathrm{Hom}_{K-ev}(V, W)$$

forme une base de $\mathrm{Hom}_{K-ev}(V, W)$.

Preuve: pour mq $\mathcal{B}_{B,B'}$ et une base de $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ il suffit de mq

Soit $x_{i,j}$ $i \leq d'$ $j \leq d$ des scalaires tq

$$\varphi = \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^{d} x_{i,j} \mathcal{E}_{i,j} = \underline{0}_W$$

$$\Longrightarrow \forall j_0 = 1 \dots d$$

$$\varphi(e_{j_0}) = 0_W$$

$$\sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^{d} x_{ij}\, e_j^*(e_{j_0}) f_i = 0_W$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d'} x_{ij_0} f_i = 0_W$$

$\{f_1, \dots, f_{d'}\}$ est une famille libre

$$\forall i = 1, \dots, d' \quad x_{ij_0} = 0_K$$

$$\forall j_0 = 1, \dots, d \quad \forall i = 1, \dots, d'$$

$$x_{ij_0} = 0_K$$

les (x_{ij}) sont tous nuls.

(E_{ij}) forment une base.

Mq $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ est CL des $(\mathcal{E}_{ij})$

$$\varphi = \sum_{i,j} m_{ij} \mathcal{E}_{ij}$$ on cherche les m_{ij}

Soit $e_k \in B$ on calcule

$$\varphi(e_k) = \sum_{i,j} m_{ij} \mathcal{E}_{ij}(e_k)$$

$$\varepsilon_{i,j}(e_k) = e_j^*(e_k) f_i \in W$$

$$e_j^*(e_k) = \delta_{j=k} = \begin{cases} 1 \text{ si } j=k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\varphi(e_k) = \sum_{i=1}^{d'} m_{ik} f_i$$

m_{ik} = la $i^{\text{ème}}$ coor de $\varphi(e_k)$ ds la base B'

$$m_{ik} = f_i^*(\varphi(e_k)) \quad \forall k \leq d$$

$$\varphi = \sum_{i,j}\sum m_{i,j}\mathcal{E}_{ij} = \sum_{i,j}\sum \mathbf{f}_i^*(\varphi(\mathbf{e}_j))\mathcal{E}_{ij}$$

$$m_{i,j} = \mathbf{f}_i^*(\varphi(\mathbf{e}_j)).$$

$$\varphi(e_j) = \sum_i m_{ij} f_i$$

Déf: les $(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ sont les coefs de φ ds la base $\mathcal{B}_{B,B'} \subset \mathrm{Hom}_K(V,W)$

$m_{ij}(\varphi)$

Comportement des Coordonnées

Combinaison Lineaire

PROPOSITION 7.7. *Soit*

$$\varphi, \psi : V \mapsto W$$

deux applications lineaires et $(m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d}$, $(n_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d}$ *leurs coordonnees dans la base* $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. *Pour tout* $\lambda \in K$, $\lambda.\varphi + \psi$ *est lineaire et ses coordonnees dans la base* $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ *sont donnees par*

$$(\lambda.m_{ij} + n_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d}.$$

$$m_{ij}(\lambda \varphi + \psi) = \lambda m_{ij}(\varphi) + m_{ij}(\psi)$$

Preuve: $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ $B_U = B_{B,B'}$

$\overset{\shortparallel}{U}$

on sait que si U est un K-ev

et B_U est une base de U

$e \in B_U$ la fct qui a

$u \in U \longrightarrow$ coef de u par rapport a e et une forme lineaire.

on a que

$$m_{ij}(\varphi) = f_i^*(\varphi(e_j))$$

$\varphi \to \varphi(e_j)$ est linéaire en φ

et $w \to f_i^*(w)$ est linéaire en w

$$m_{ij} = f_i^* \circ \text{eval}_{e_j}(\bullet)$$

$$(\lambda\varphi+\psi)(e_j)=\lambda\cdot\varphi(e_j)+\psi(e_j)$$

$\square$

Image d'un vecteur

Proposition 7.5. *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire et $(m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d}$ les coordonnees de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Alors pour $k = 1, \cdots, d$ les*

$$(m_{i,k})_{i\leqslant d'}$$

sont les coordonnees de $\varphi(\mathbf{e}_k)$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Proposition 7.6. *Avec les notations precedentes, si $v = \sum_{j=1}^{d} x_j \mathbf{e}_j$, on a*

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{d'} y_i \mathbf{f}_i \text{ avec } y_i = \sum_{j=1}^{d} m_{ij}.x_j.$$

Preuve :

$$v = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j$$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{d} x_j e_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} x_j \varphi(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} x_j \sum_{i=1}^{d'} m_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^{d} x_j m_{ij} f_i$$

$$\sum_{j=1}^{d} x_j \sum_{i=1}^{d'} m_{ij} f_i$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d'} x_j \cdot m_{ij} \cdot f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{d'} \left(\sum_{j=1}^{d} x_j \, m_{ij} \right) \cdot f_i$$

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{d'} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{d} m_{ij} x_j \right)}_{y_i} \cdot f_i$$

$$\square$$

Composition d'ALs

$$U \qquad , \qquad V \qquad , \qquad W$$

$$\mathcal{B} \qquad \mathcal{B}' \qquad \mathcal{B}''$$

$$\{e_k, k \leq d\} \qquad \{f_j, j \leq d'\} \qquad \{g_i, i \leq d''\}$$

$\varphi : U \longrightarrow V$ de coefs

$$(n_{jk})_{\substack{j \leq d' \\ k \leq d}}$$

$$\psi : V \longrightarrow W \quad \text{de coefs} \quad (m_{ij})_{\substack{i \leq d'' \\ j \leq d'}}$$

$$\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

de coefs $(l_{ik})_{\substack{i \leq d'' \\ k \leq d}}$

THÉORÈME 7.5. *Soient $(n_{jk})_{j\leqslant d',k\leqslant d}$ les coordonnees de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $(m_{ij})_{i\leqslant d'',j\leqslant d'}$ les coordonnees de ψ dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$. Alors les coordonnees $(l_{ik})_{i\leqslant d'',k\leqslant d}$ de $\psi\circ\varphi$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$ sont donnees par*

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{d'} m_{ij}.n_{jk}.$$

$\psi\circ\varphi \qquad \psi \qquad \varphi$

Preuve :

$$\varphi = \sum_{j,k} n_{j,k} E_{jk} = \sum_{j,k} n_{j,k} e_k^* f_j$$

$$\Psi = \sum_{i,j} m_{ij} f_j^* \cdot g_i$$

si $k \leq d$ $\quad j \leq d'$

$$\varphi(e_k) = \sum_{j=1}^{d'} n_{j,k} \cdot f_j$$

$$\Psi(f_j) = \sum_{i=1}^{d} m_{ij} \cdot g_i$$

$$\psi \circ \varphi_j(e_k) = \psi(\varphi(e_k))$$

$$\psi\left(\sum_{j=1}^{d'} \cdot n_{j,k} \cdot f_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{d'} n_{j,k}\, \psi(f_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{d'} n_{jk} \sum_{i=1}^{d} m_{ij} \cdot g_i$$

$$\sum_{i=1}^{d''}\left(\sum_{j=1}^{d'} m_{ij} n_{jk}\right) g_i = \psi\circ\varphi(e_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{d''} l_{ik}\, g_i$$

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{d'} m_{ij}\cdot n_{jk}$$

$\square$

Duale

$$\varphi : V \longrightarrow W \qquad \ell : W \longrightarrow K$$

application duale de φ

$$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$$

$$\ell \longrightarrow \varphi^*(\ell) := \ell \circ \varphi$$

$$\varphi^*(\ell)(v) = (\ell \circ \varphi)(v) = \ell(\varphi(v)) \in K$$

$\varphi^*(\ell)$ est une forme lineaire sur V

(un element de V^*)

$\varphi^*(\ell) = \ell \circ \varphi : V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\ell} K$

est lineaire car composée de 2 applications lineaire.

Proposition 7.8. *L'application*

$$\varphi^* : \ell \in W^* \mapsto \ell \circ \varphi \in V^*$$

est lineaire:

$$\varphi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*).$$

Preuve: on a vu que $\varphi^*(\ell)$ est une forme linéaire (de la variable $v \in V$)

On regarde

$$\varphi^*(\lambda \ell + \ell') \quad \text{pour } \lambda \in K \; \ell, \ell' \in W^*$$

$$\overset{?}{=} \lambda \varphi^*(\ell) + \varphi^*(\ell')$$

On veut mq $\forall v \in V$

$$\varphi^*(\lambda \ell + \ell')(v) = \lambda \varphi^*(\ell)(v) + \varphi^*(\ell')(v)$$

$$\varphi^*(\lambda \ell + \ell')(v) = (\lambda \ell + \ell')(\varphi(v))$$

$$= \lambda . \ell(\varphi(v)) + \ell'(\varphi(v))$$

$$= \lambda . \varphi^*(\ell)(v) + \varphi^*(\ell')(v)$$

$\square$

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

$$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$$

-

<u>Ex</u> : $i : U \subset V$

SEV

Soit i l'injection $i : v \in U \hookrightarrow v \in V$

i est linéaire de U vers V

$$i^* : V^* \longrightarrow U^*$$

$$\ell \longrightarrow i^*(\ell) : v \in U \longrightarrow \ell(i(v)) = \ell(v)$$

$i^*(l) : u \in U \longrightarrow l(u)$

$i^*(l) =$ la restriction de l à U

$l_{|U} : u \in U \longrightarrow l(u)$.

$\square$

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & V & \longrightarrow & W \\ & \cup & & \cup \\ & B & & B' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi^* : & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \cup & & \cup \\ & B'^* & & B^* \end{array}$$

Soient $(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ les coefs de φ ds $B_{B,B'}$

Soient $(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ les coefs de φ ds $B_{B,B'}$

Soit $(m^*_{ji})_{\substack{j \leq d \\ i \leq d'}}$ les coefs de φ^* ds $B_{B'^*,B^*}$

THÉORÈME 7.6. *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire; $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de V et V et $(m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d}$ les coefficients de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $(m^*_{ji})_{j\leqslant d, i\leqslant d'}$ les coefficients de φ^* dans la base associee aux bases duales*

[redacted] $\mathcal{B}_{\mathscr{B}'^*,\mathscr{B}^*}$

on a

$$m^*_{ji} = m_{ij},\ i \leqslant d',\ j \leqslant d.$$

Preuve: (m^*_{ji}) les coefs de φ^*

On sait $\varphi^*(f_i^*) = \sum_{j=1}^{d} m^*_{ji} e_j^*$

On calcule les m^*_{ji} en evaluant $\varphi^*(f_i^*)(e_j)$

$$\varphi^*(f_i^*)(e_{j'}) = f_i^*(\varphi(e_{j'}))$$

$$= m_{ij'}$$

$$\varphi^*(f_i^*)(e_{j'}) = \sum_{j=1}^{d} m^*_{ji} \cdot \underbrace{e_j^*(e_{j'})}$$

$$= m^*_{j'i} \,.$$

Théorème 7.7 (Rang de l'application duale). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire et $\varphi^* : W^* \mapsto V^*$ sa duale, alors on a*

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi^*) = \operatorname{rg}(\varphi^*).$$

Preuve: $r = \dim \varphi(V)$

$\{f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)\} < W$

une base de $\varphi(V)$ on la complete

en une base de W

$B' = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_{d'}\}$

Soit $\{e_{r+1}, \dots, e_d\}$ une base de $\ker \varphi$

on sait que

$B = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots e_d\} \subset V$ est une base de V

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{d'} m_{ij} f_i$$

$$\varphi(e_j) = f_j \quad \text{si} \quad j \leq r$$

$$\varphi(e_j) = 0_W \quad \text{si} \quad j \geq r+1 \quad (e_j \in \ker \varphi)$$

$$\forall i \leq d' \; j \leq d \qquad m_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } j \leq r \\ 0 & \text{si } j \geq r+1 \end{cases}$$

Soient $\{e_j^* \quad j \leq d\} = B^*$ les bases duales

$\{f_i^* \quad i \leq d'\} = B'^*$

$\varphi^*(W^*)$ est engendré par

les $\varphi^*(f_i^*)$ $\quad i = 1 \dots d'$

$$\varphi^*(f_i^*) = \sum_{j=1}^{d} m^*_{ji} e_j^*$$

$$= \sum_{j=1}^{d} m_{ij} e_j^*$$

$$= \begin{cases} e_i^* & \text{si } i \leq r \\ 0 & \text{si } i \geq r+1 \end{cases}$$

$\{\varphi^*(f_i^*)\ i \leq d\} = \{e_i^*\ i \leq r\}$ base de $\varphi^*(W^*)$ de cardinal r $\square$