M: Do you know what I'm talking about ?

N: The Matrix ?

M: Do you want to know what IT is ?

The Matrix is everywhere. It is all around us.

Even now, in this very room

Matrices

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & V & \longrightarrow & W \\ & \cup & & \cup \\ & B=\{e_1,\dots,e_d\} & & B'=\{f_1,\dots,f_{d'}\} \end{array}$$

$$\mathcal{B}_{B,B'} = \{ \varepsilon_{ij} = e_j^*(\cdot) f_i \quad i \leq d' \; j \leq d \}$$

base de $\mathrm{Hom}_K(V,W)$

$$CL_{\mathcal{B}_{B,B'}} : (K^{d'})^{d} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V,W)$$

$$(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}} \mapsto \sum_{i,j} m_{ij} E_{ij} = \varphi$$

$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, il existe de $(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ uniques tq $\varphi = \sum_i \sum_j m_{ij} E_{ij}$

& $(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ = les coefs de φ relativement aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ (on a la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$)

$(m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ = la matrice associée à φ (ds les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$)

$$m_{ij} = m_{ij}(\varphi) = f_i^*(\varphi(e_j))$$

$$K^{d'} \times K^{d'} \times \dots \times K^{d'} \quad d\text{-fois}$$

$$\parallel$$

DÉFINITION 8.1. *L'espace vectoriel* $(K^{d'})^d$ *s'appelle l'espace des matrices de dimension* $d' \times d$ *a coefficients dans* K *et est note*

$$M_{d' \times d}(K) = \{(m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d},\ m_{ij} \in K\}.$$

Un element de $M_{d' \times d}(K)$ *est appelle matrice de dimensions* $d' \times d$ *ou juste une matrice* $d' \times d$.

$$M = (m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}}_{d \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}}\right\} d' \text{ lignes}$$

1

2

$$
= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}
$$

2ieme ligne

i-eme ligne

2 ieme colonne

j-ieme colonne

<u>Lois de K-EV</u> : $M_{d'\times d}(K)$ a une structure de K-ev de dim $d'\times d$ obtenue en additionnant coef par coefs et en $\times$ tous les coefs par un scalaire

$M = (m_{ij})$ $\quad N = (n_{ij})$ $\quad \lambda \in K$

$$\lambda M + N = (\lambda m_{ij} + n_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

$$CL_{\mathcal{B}_{B,B'}} : \begin{array}{ccc} (K^{d'})^{d} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V,W) \\ (m_{ij})_{\substack{i\leq d' \\ j\leq d}} & \longmapsto & \sum_i \sum_j m_{ij} \mathcal{E}_{ij} \end{array}$$

est un isomorphisme de K-ev

DÉFINITION 8.2. *Soient $\mathscr{B} \subset V$, $\mathscr{B}' \subset W$ des bases comme ci-dessous et $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \subset \mathrm{Hom}(V,W)$ la base de $\mathrm{Hom}(V,W)$ associee. L'application reciproque $CL^{-1}_{\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}$ sera egalement notee*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} : \mathrm{Hom}(V,W) \mapsto M_{d'\times d}(K).$$

Explicitement, si on la la decomposition $\varphi = \sum_{i\leqslant d', j\leqslant d} \sum m_{ij}(\varphi)\mathcal{E}_{ij}$ alors on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij}(\varphi))_{i\leqslant d', j\leqslant d} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi)$ est appellee matrice associee a φ dans les bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$. Rappelons que pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$, $(m_{i,j}(\varphi))_{i\leqslant d'}$ est l'ensemble des coordonnees de $\varphi(\mathbf{e}_j)$ pour $\mathbf{e}_j \in \mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$: ie.

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant d'} m_{ij}(\varphi)\mathbf{f}_i.$$

$$m_{ij}(\varphi) = f_i^*(\varphi(e_j))$$ i-ème coord ds $\mathcal{B}'$ de l'image par φ du j-ème elts de $\mathcal{B}$

$\mathrm{mat}_{B',B}(\varphi)$

$$= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}$$

les coordonnées de $\varphi(e_2)$
dans la base B'

Exemples Matrice nulle

$$\underline{0}_W : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto 0_W$$

$$\mathrm{mat}_{B',B}(\underline{0}_W) = (0)_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

Matrices Elementaires : $\text{mat}_{B'B}(\mathcal{E}_{ij})$

$$\mathcal{E}_{ij} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ v & \longmapsto & e_j^*(v) f_i \end{array}$$

$m_{k\ell} = m_{k\ell}(\mathcal{E}_{ij})$ les coefficients associés

$$m_{k\ell}(\mathcal{E}_{ij}) = f_k^*(\mathcal{E}_{ij}(e_\ell)) = f_k^*(e_j^*(e_\ell) f_i)$$
$$= e_j^*(e_\ell) f_k^*(f_i)$$

$$m_{kl}(\mathcal{E}_{ij}) = f_k^*\big(\mathcal{E}_{ij}(e_l)\big) = f_k^*\big(e_j^*(e_l) f_i\big)$$

$$= e_j^*(e_l)\, f_k^*(f_i)$$

$$= \delta_{jl} \cdot \delta_{ik}$$

$$m_{kl}(\mathcal{E}_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \quad l=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left(m_{kl}(\mathcal{E}_{ij})\right)_{\substack{k\\l}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ 0 \;\cdots\; 0 \;\; 0 & 1 & 0 \quad\quad 0 \\ & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} & i \\ j & \end{array}$$

On note pour $i \leq d'$ $j \leq d$ E_{ij} la matrice obtenue à partir des ε_{ij}

$$m(E_{ij})_{k,l} = \delta_{k=i}\,\delta_{l=j}$$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \end{array}$$

la famille des matrices $\{E_{ij}, i \leq d', j \leq d\}$ s'appelle la famille des

$\{E_{ij}, i \leq d', j \leq d\}$ est la famille des matrices elementaires de $M_{d' \times d}(K)$ et elle forme une base de $M_{d' \times d}(K)$ "la base canonique" $\mathcal{B}^{0}_{d',d} = \{E_{ij} \; \substack{i \leq d' \\ j \leq d}\}$.

Matrices Carrés : $d = d'$ $\dim V = \dim W$

On note l'espace des matrices carrées

$$M_d(K) = M_{d \times d}(K)$$

$$\dim M_d(K) = d^2.$$

Matrice Identité : $d = d'$ $V = W$ $B' = B$

$$\begin{aligned} Id_V : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

$$Id_V(\cdot) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} m_{ij}\, e_j^*(\cdot)\, e_i$$

$$\mathrm{Id}_V(\bullet) = \sum_i \sum_j m_{ij}\, e_j^*(\bullet)\, e_i$$

$$\mathrm{Id}_V(e_{i_0}) = \sum_{i,\, j \leq d} \sum m_{ij}\, e_j^*(e_{i_0})\, e_i$$

$$= e_{i_0}$$

$$\Longrightarrow m_{ij} = 0 \text{ is } i \neq i_0 \qquad e_j^*(e_{i_0}) = \delta_{i_0 j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$m_{ij}(Id_V) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

matrice identité de taille d

$$\mathrm{mat}_{BB}(Id_V) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{d} \Big\} d = Id_d$$

⚠ Si $W = V$ mais si $B' \neq B$

$$\mathrm{mat}_{B'B}(Id_V) \neq Id_d$$

$V = K^2$ $\quad B = \{(1,0)\,(0,1)\}$

$B' = \{(2,0)\,(0,1)\}$ = base si car $K \neq 2$

$$\operatorname{mat}_{B',B}(Id_V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Id_V(e_1) = e_1 = (1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + 0(0,1)$$

$$Id_V(e_2) = e_2 = (0,1) = 0(2,0) + 1.(0,1)$$

$d = 2$

$$\mathrm{Id}_V = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} m_{ij} \mathcal{E}_{ij}$$

$$= m_{11} \mathcal{E}_{11} + m_{12} \mathcal{E}_{12}$$

$$+ m_{21} \mathcal{E}_{21} + m_{22} \mathcal{E}_{22}$$

$$\mathrm{Id}_V(e_1) = m_{11} \mathcal{E}_{11}(e_1) + m_{12} \mathcal{E}_{12}(e_1)$$
$$+ m_{21} \mathcal{E}_{21}(e_1) + m_{22} \mathcal{E}_{22}(e_1)$$

$$\mathrm{Id}_V(e_1) = m_{11}\,\mathcal{E}_{11}(e_1) + m_{12}\,\mathcal{E}_{12}(e_1)$$
$$+ m_{21}\,\mathcal{E}_{21}(e_1) + m_{22}\,\mathcal{E}_{22}(e_1)$$

$$\mathcal{E}_{11}(\bullet) = e_1^*(\bullet)e_1 \qquad \mathcal{E}_{12}(\bullet) = e_2^*(\bullet)e_1$$
$$\mathcal{E}_{21}(\bullet) = e_1^*(\bullet)e_2 \qquad \mathcal{E}_{22}(\bullet) = e_2^*(\bullet)e_2$$

$$\mathcal{E}_{11}(e_1) = e_1^*(e_1)\cdot e_1 = e_1$$
$$\mathcal{E}_{12}(e_1) = e_2^*(e_1)e_1 = 0_V$$

$$Id_V(e_1) = e_1$$

$$= m_{11} e_1 + 0_V + m_{21} e_2 + 0_V$$

$$m_{11} = 1 \quad m_{21} = 0$$

$$\mathrm{Mat}_{BB}(Id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On recommence avec e_2 $Id_V(e_2) = e_2$

$\Rightarrow m_{12} = 0 \quad m_{22} = 1$

Matrices Scalaires : $[\times\lambda] : V \longrightarrow V$

$\lambda \in K$: $[\times\lambda] : V \longrightarrow V$

$v \longmapsto \lambda . v$

$B' = B$

$$\mathrm{mat}_{BB}([\times\lambda]) = \lambda . \mathrm{Id}_d = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Matrices Diagonales : $d = d'$ $B = B'$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in K$ et soit $\varphi : V \to V$

l'unique appl linéaire tq $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$.

$\Longrightarrow$

$v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$

$\varphi(v) = x_1 \lambda_1 e_1 + \dots + x_d \lambda_d e_d$

$$\mathrm{mat}_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$$

Matrices triangulaires : $d = d'$ $B = B'$

φ telle que pour $j = 1, \dots, d$

$$\varphi(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq j} m_{ij} e_i$$

$\varphi(e_1) = m_{11} e_1$ $\varphi(e_2) = m_{12} e_1 + m_{22} e_2 + 0 e_3 + 0 e_4$

$\varphi(e_3) = m_{13} e_1 + m_{23} e_2 + m_{33} e_3 \dots\dots$

$$\mathrm{mat}_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \times & \\ 0 & m_{22} & m_{23} & & \\ \vdots & 0 & m_{33} & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & m_{dd} \end{pmatrix}$$

$\|$

triangulaire supérieure.

Matrices lignes $d' = 1$

Matrices Colonnes : $d=1$

$$M_{d' \times 1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{d'1} \end{pmatrix} \quad m_{11}, \dots, m_{d'1} \in K \right\}$$

$$= Col_{d'}(K)$$

Matrices lignes : $d' = 1$

$$M_{1\times d}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \end{pmatrix} \; m_{11}, \dots m_{1d} \in K \right\}$$

$$= \mathrm{Lig}_d(K)$$

Lignes et Colonnes Extraites

DÉFINITION 8.4. *Soit une matrice*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \in M_{d' \times d}(K).$$

Pour $j \leqslant d$ (resp. $i \leqslant d'$), la j-ieme colonne de M (resp. la i-ieme ligne de M) est la matrice colonne (resp. ligne)

$$\mathrm{Col}_j(M) = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{d'j} \end{pmatrix} \in \mathrm{Col}_{d'}(K), \ \textit{resp.}\ \mathrm{Lig}_i(M) = \begin{pmatrix} m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{id} \end{pmatrix} \in \mathrm{Lig}_d(K)$$

Opérations sur les matrices

Combinaisons Linéaires

$M_{d' \times d}(K)$ est un K-ev

$M = (m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ $N = (n_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ $\lambda \in K$

$$\lambda M + N = (\lambda m_{ij} + n_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

Produit:

$$\begin{array}{ccc} U, & V, & W \\ \cup & \cup & \cup \\ B & B' & B'' \end{array}$$

$$B = \{ e_k \quad k \leq d \}$$

$$B' = \{ f_j \quad j \leq d' \}$$

$$B'' = \{ g_i \quad i \leq d'' \}$$

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad \psi : V \longrightarrow W, \quad \psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

$$\varphi : U \longrightarrow V \qquad \psi : V \longrightarrow W$$

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

$$N = \operatorname{mat}_{B',B}(\varphi) \qquad M = \operatorname{mat}_{B''B'}(\psi)$$

$$L = \operatorname{mat}_{B''B}(\psi \circ \varphi)$$

$$L = (l_{ik})_{\substack{i \leq d'' \\ k \leq d}} \qquad N = (n_{jk})_{\substack{j \leq d' \\ k \leq d}}$$

$$M = (m_{ij})_{\substack{i \leq d'' \\ j \leq d'}}$$

on a $\displaystyle l_{ik} = \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}$

Définition 7.3. *Soient $d, d', d'' \geqslant 1$ et $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$, on defini le produit des matrices M et N comme etant la matrice*

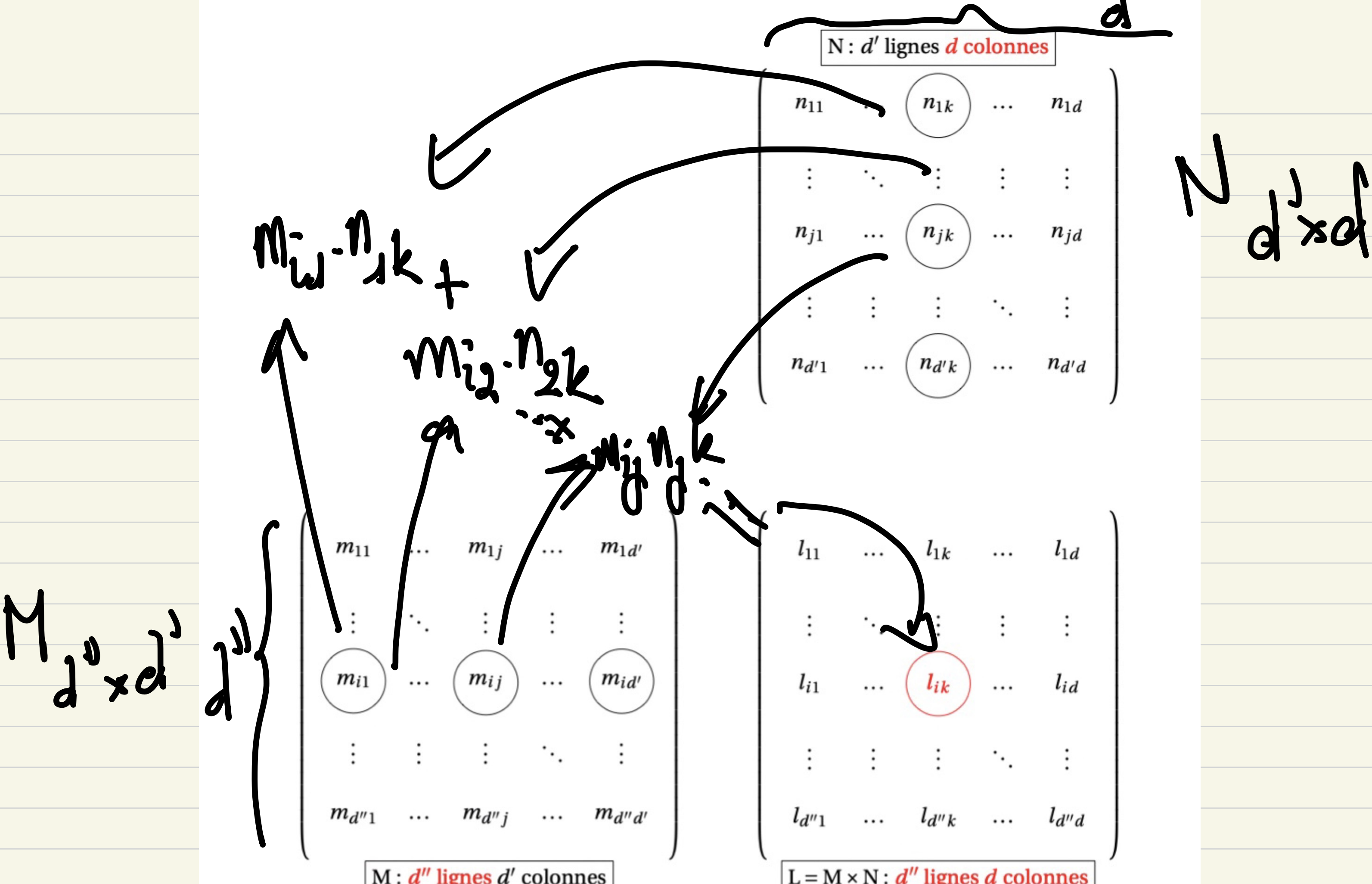
$$L := M.N = M \times N$$

avec

$$L = (l_{ik})_{i \leqslant d'', k \leqslant d} = \Big(\sum_{j=1}^{d'} m_{ij}.n_{jk}\Big)_{i \leqslant d'', k \leqslant d} \in M_{d'' \times d}(K).$$

⚠ il faut que la 2em dim de la 1er matrice M soit egale à la 1ere dim de la 2em matrice N

et alors le resultat $L = M \times N$ est une matrice dont la 1ere dim est la 1er dim de M et la 2em dim est la 2em dim de N.


N : d' lignes d colonnes
N d'×d
M d''×d'
d''
m i1 · n 1k +
m i2 · n 2k + ... + m ij n jk
M : d'' lignes d' colonnes
L = M × N : d'' lignes d colonnes

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{j=k} \cdot E_{il}$$

$$= \begin{cases} E_{il} & \text{si } j=k \\ 0_{d'' \times d} & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Preuve : on veut calculer la composée

$$\mathcal{E}_{ij} \circ \mathcal{E}_{k\ell}$$

$$\mathcal{E}_{k\ell}(u) = e_\ell^*(u) f_k \qquad \mathcal{E}_{ij}(v) = f_j^*(v) \cdot g_i$$

$$\mathcal{E}_{ij}(\mathcal{E}_{k\ell}(u)) = \mathcal{E}_{ij}(e_\ell^*(u) f_k)$$

$$= e_l^*(v)\, \mathcal{E}_{ij}(f_k)$$

$$= e_l^*(v)\, f_j^*(f_k) \cdot g_i = \delta_{j=k}\, e_l^*(v)\, g_i$$

$$f_j^*(f_k) = \delta_{j=k}$$

$$= \delta_{j=k}\, \mathcal{E}_{il}(v)$$

Théorème 8.1 (Proprietes fonctionelles du produit de matrices). *Le produit de matrices ainsi defini a les proprietes suivantes*

(1) *Distributive a gauche: pour* $\lambda \in K$, $M, M' \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$,

$$(\lambda.M + M').N = \lambda.M.N + M'.N.$$

(2) *Distributive a droite: pour* $\lambda \in K$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N, N' \in M_{d' \times d}(K)$,

$$M.(\lambda.N + N') = \lambda.M.N + M.N'.$$

(3) *Neutralite de l'identite: pour* $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\mathrm{Id}_{d''}.M = M,\ M.\mathrm{Id}_{d'} = M$$

(4) *La matrice nulle est absorbante: pour* $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\underline{0}_{d'''d''}.M = \underline{0}_{d'''d'},\ M.\underline{0}_{d'd} = \underline{0}_{d''d}.$$

(5) *Associativite: Soit* $d''' \geqslant 1$ *et* $L \in M_{d''' \times d''}(K)$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$ *alors*

$$(L.M).N = L.(M.N) \in M_{d''' \times d}(K)$$

Preuve (sans calculs)

Théorème 8.2. *Soit U, V, W des espaces vectoriels de dimensions d, d', d'' et $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ des bases. Soient des applications lineaires*

$$\varphi : U \mapsto V,\ \ \psi : V \mapsto W \ \textit{avec}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (n_{jk})_{jk},\ \ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi) = (m_{ij})_{ij}, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = (l_{ik})_{ik}$$

alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) \tag{8.1.3}$$

Autrement dit on a

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1d} \\ l_{21} & \cdots & l_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{d''1} & \cdots & l_{d''d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d'} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d''1} & m_{d''2} & \cdots & m_{d''d'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1d} \\ n_{21} & \cdots & n_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ n_{d'1} & \cdots & n_{d'd} \end{pmatrix}$$

L'associativité du produit de 3 matrices résulte de l'associativité de la composée de 3 AL

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\theta} Z$$

alors on a vu que

$$\theta \circ (\psi \circ \varphi) = (\theta \circ \psi) \circ \varphi$$

et en traduisant en terme de matrices on a

$$M_\theta \times (M_\psi \times M_\varphi) = (M_\theta \times M_\psi) \times M_\varphi$$

- On a vu la distributivité

$$\psi \circ (\lambda \varphi + \varphi') = \lambda \cdot \psi \circ \varphi + \psi \circ \varphi'$$

⋮

$\square$

<u>Applications du produit matriciel</u>

Image d'un Vecteur

Proposition 8.1. *Soit* $\mathscr{B} \subset V$, $\mathscr{B}' \subset W$ *des bases,* $v \in V$ *un vecteur de coordonnees* $(x_j)_{j\leqslant d}$ *dans la base* $\mathscr{B}$ *(ie.* $v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d$*) et* $(y_i)_{i\leqslant d'}$ *les coordonnees de* $\varphi(v)$ *dans la base* $\mathscr{B}'$ *(ie.* $\varphi(v) = y_1.\mathbf{f}_1 + \cdots + y_{d'}.\mathbf{f}_{d'}$*). On associe a* v *et* $\varphi(v)$ *leurs matrices colonnes (de hauteurs d et d'=*

$$\mathrm{Col}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \ \mathrm{Col}_{\mathscr{B}'}(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix}$$

alors on a la relation

$$\mathrm{Col}_{\mathscr{B}'}(\varphi(v)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{Col}_{\mathscr{B}}(v).$$

Autrement dit si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d}$*, on a*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

Rmq $\quad \mathrm{Col}_{\mathcal{B}}(e_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & & m_{1d} \\ \vdots & & & & \\ m_{i1} & \cdots & m_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \\ m_{d1} & \cdots & m_{dj} & \cdots & m_{dd} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \phantom{m_{11}} & & j & & \phantom{m_{dd}} \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \\ m_{ij} \\ \\ m_{dj} \end{pmatrix}$$

Exemple $V = K^2 \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_2^0 \quad \varphi : K^2 \to K^2$

$$\varphi(x,y) = (x+2y\ ,\ 3x-y)$$

$$\varphi(1,0) = (1,3)$$

$$\varphi(0,1) = (2,-1)$$

$$\mathrm{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Isomorphismes</u> :
$d'=d$

$$\varphi : \underset{\underset{B}{\cup}}{V} \xrightarrow{\sim} \underset{\underset{B'}{\cup}}{W}$$

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) \in M_d(K)$$

$$\varphi^{-1} : \underset{\underset{B'}{\cup}}{W} \xrightarrow{\sim} \underset{\underset{B}{\cup}}{V}$$

$$\mathrm{mat}_{BB'}(\varphi^{-1}) \in M_d(K)$$

PROPOSITION 8.2. *soit $\varphi : V \simeq W$ un isomorphisme lineaire et $\varphi^{-1} : W \mapsto V$ la reciproque. On a les relations*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi^{-1}).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{Id}_d,$$
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi^{-1}) = \mathrm{Id}_d.$$

En particulier si $V = W$ et $\varphi = \mathrm{Id}_V$ est l'identite on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_V).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_d. \tag{8.1.4}$$

Preuve:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & V \\ \cup & & \cup & & \cup \\ B & & B' & & B \end{array}$$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$$

en terme de matrices

$$\varphi^{-1}\circ\varphi = Id_V \quad \text{devient}$$

$$mat_{BB'}(\varphi^{-1}) \times mat_{B'B}(\varphi) = mat_{BB}(Id_V)$$

$$= Id_d$$

et de même $\varphi\circ\varphi^{-1} = Id_W$

$$mat_{B'B}(\varphi) \times mat_{BB'}(\varphi^{-1}) = mat_{B'B'}(\varphi\circ\varphi^{-1}) = Id_d$$

Hier : $\varphi : \begin{array}{c} V \\ \cup \\ \mathcal{B} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} W \\ \cup \\ \mathcal{B}' \end{array}$

on associe une matrice

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi) = \left(m_{ij}(\varphi)\right)_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

qui "représente" φ

$$\mathrm{mat}_{B'B} : \mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{d' \times d}(K)$$

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\lambda \varphi + \varphi') = \lambda \, \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) + \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi')$$

On a défini un produit

$$M_{d''\times d'}(K) \times M_{d'\times d}(K) \longrightarrow M_{d''\times d}(K)$$

$$(M, N) \longrightarrow M.N$$

de sorte que

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] & W \\
\cup & \cup & \cup \\
B & B' & B''
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi)$$

Rang d'une Matrice

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

$$rg(\varphi) = \dim \varphi(V) \leq \min(d, d')$$

B = base de V $\quad B = \{e_1, \dots, e_d\}$

$$\varphi(V) = \mathrm{Vect}\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)\}$$

DÉFINITION 8.6. *Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$, le rang d'une matrice M est la dimension de l'espace engendre par des d colonnes de M dans $\mathrm{Col}_{d'}(K)$:*

$$\mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Vect}(\{\mathrm{Col}_j(M),\ j \leqslant d\}).$$

Autrement dit $\mathrm{rg}(M)$ est la taille maximale d'une sous-famille libre de la famille $\{\mathrm{Col}_j(M),\ j \leqslant d\}$ des colonnes de M.

Rmk: $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi))$

Rmk: $\mathrm{rg}(M) \leq \min(d, d')$ $\quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1d} \\ & & \\ m_{d'1} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}$

Matrice de Rang r : $\quad r \leq \min(d, d')$

$$I_{d' \times d}(r) = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{matrix}}_{r} & r \quad 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} d'}_{d}$$

$$
\underset{f_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{f_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \cdots\cdots \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \underset{f_r}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

Si $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \ldots \quad \lambda_r = 0$

$$\varphi : V \longrightarrow W \qquad rg(\varphi) = r$$

$\mathcal{I} = \{f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)\}$ = base de $\varphi(V)$

$\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_{d'}\}$ = base de W

$\mathcal{K} = \{e_{r+1}, \dots, e_d\}$ = base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d\}$ = Base de V

$j = 1 \ldots r \qquad \varphi(e_j) = f_j$

$j \geq r+1 \qquad \varphi(e_j) = 0_W \qquad e_j \in \ker \varphi$

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = \begin{array}{r@{}l} r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\0\\1\end{array}}\right. & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ & \quad\underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \cdots\quad 0}}_{r} \end{array}$$

$$\mathrm{mat}_{B',B}(\varphi) = I_{d' \times d}(r)$$

__Transposition__ : $\varphi : V \longrightarrow W$

$$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$$
$$\ell \longmapsto \varphi^*(\ell) : \ell \circ \varphi$$

Si B, B' sont des bases de V et W

et B^*, B'^* ———————————— V^* et W^* les duales

Théorème (Matrice de l'application duale). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire; $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de V et V' et*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i\leqslant d',j\leqslant d}$$

la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et soit

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}^*,\mathscr{B}'^*}(\varphi^*) = (m^*_{ji})_{j\leqslant d,i\leqslant d'}$$

la matrice de φ^* dans les bases $\mathscr{B}'^*$ et $\mathscr{B}^*$ alors on a

$$m^*_{ji} = m_{ij},\ i \leqslant d',\ j \leqslant d$$

Définition 8.7. *La transposition est l'application des matrices $d' \times d$ vers les matrice $d \times d'$ definie par*

$$^t\bullet : \begin{array}{ccc} M_{d'\times d}(K) & \mapsto & M_{d\times d'}(K) \\ M = (m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d} & \mapsto & {}^tM = (m^*_{ji})_{j\leqslant d, i\leqslant d'} \end{array},$$

avec

$$m^*_{ji} = m_{ij},\ j \leqslant d, i \leqslant d'.$$

Autrement dit si

$$M = (m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d},\ {}^tM = (m^*_{ji})_{j\leqslant d, i\leqslant d'} = (m_{ij})_{j\leqslant d, i\leqslant d'}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix},\ {}^tM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots & \cdots & m_{d'1} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & \cdots & m_{d'2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1d} & m_{2d} & \cdots & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}$$

$$^t\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = \mathrm{mat}_{B^*B'^*}(\varphi^*)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Théorème 8.3. *(Proprietes fonctionelles de la transposition) La transposition a les proprietes suivantes:*

(1) *Linearite:* ${}^t(\lambda.M + M') = \lambda\, {}^tM + {}^tM'$.
(2) *Involutivite:* ${}^t({}^tM) = M$.
(3) *Anti-multiplicativite: pour* $M \in M_{d'',d'}(K)$, $N \in M_{d',d}(K)$, $M.N \in M_{d'',d}(K)$ *et*

$${}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM.$$

Preuve: par un calcul direct.

par les propriétés analogues de l'application

- $\varphi \to \varphi^*$ est lineaire

- $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$ | $\varphi^{**} = \varphi$ si on identifie V^{**} a V par l'evaluation.

Rang de la transposée

Théorème 8.4 (Invariance du rang par transposition). *Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$ on a*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM).$$

__Preuve :__ on a mq $\varphi : V \to W$ et $\varphi^* : W^* \to V^*$ alors

$$\mathrm{rg}(\varphi^*) = \mathrm{rg}(\varphi)$$

$$M = \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi)$$

$$M^* = \mathrm{mat}_{B^*B'^*}(\varphi^*) = {}^tM$$

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(M) =$$

$$\|$$

$$\mathrm{rg}(\varphi^*) = \mathrm{rg}({}^tM)$$

Ex: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ Car $K \neq 3$ $\quad$ $\mathrm{rg}\, M = 2$

${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$: les 2 vecteurs colonnes sont linéairement indep si car $K \neq 3$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda + 4\mu = 0 \quad 2\lambda + 5\mu = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0$

$\lambda = -\mu \quad 3\mu = 0 \quad \mu = 0$ si car $K \neq 3$

Car $K = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} M = 1$

COROLLAIRE 8.1. *La rang d'une matrice est egal a la dimension de l'espace K^d engendre par les vecteurs lignes de M*

$$\mathrm{rg}(M) = \dim_K \mathrm{Vect}(\mathrm{Lig}_j(M),\ j = 1, \cdots, d').$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \dim \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \dim \mathrm{Vect}\left\{(1,2,3),\ (4,5,6)\right\}$$

Algèbre des Matrices Carrées

$M \in M_{d'' \times d'}(K) \quad N \in M_{d' \times d}(K)$

$$M \cdot N \in M_{d'' \times d}(K)$$

Si $d = d' = d''$

$M, N \in M_{d \times d}(K) = M_d(K)$

$M \cdot N \in M_{d \times d}(K) = M_d(K)$

si $d = d' = d''$ la multiplication des matrices carrées de taille d est une loi de composition interne

$$\cdot\,.\,\cdot : \begin{array}{ccc} M_d(K) \times M_d(K) & \longrightarrow & M_d(K) \\ (M, N) & \longrightarrow & M.N \end{array}$$

et on a vu que

- la multiplication est distributive / $+$
- Id_d est un element neutre pour $\cdot$

$$Id_d \cdot M = M = M \cdot Id_d$$

$$\Downarrow$$

Théorème 8.5. *L'espace $M_d(K)$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication est un anneau (non-commutatif en general) dont l'element neutre est la matrice carree nulle $\underline{0}_d = \underline{0}_{d\times d}$ et dont l'unite est la matrice identite Id_d. De plus la structure de K-EV de $M_d(K)$ fait de l'anneau $(M_d(K), +, .)$ une K-algebre (de dimension d^2).*

On l'appelle l'algebre des matrices carres de dimension d (ou de rang d) sur le corps K (ou a coefficient dans K).

Vu pour $d=2$

$$\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V,V)$$

muni de l'addition $\varphi, \psi \to \varphi + \psi$

et de la composition $\varphi, \psi \to \psi \circ \varphi$

a une structure d'anneau (de K-algebre)

comme neutre $\underline{0}_V$ et identite Id_V

$$\varphi : \underset{B}{\overset{V}{\cup}} \longrightarrow \underset{B}{\overset{V}{\cup}}$$

$$\longrightarrow \mathrm{mat}_{BB}(\varphi) = \mathrm{mat}_{B}(\varphi) \in M_d(K)$$

Théorème 8.6. *Soit V de dimension finie d et $\mathscr{B}$ une base de V, l'application*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} : \mathrm{End}(V) \mapsto M_d(K)$$

est un isomorphisme d'anneaux (et donc de K-algebres) pour les lois d'addition et de multiplication decrites precedemment.

<u>Preuve</u> : on sait que mat_B est un iso de K-ev

il "suffit" de verifie que mat_B est multiplicative

$$\mathrm{mat}_B(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{BB}(\psi \circ \varphi)$$

$$= \mathrm{mat}_{BB}(\psi) \circ \mathrm{mat}_{BB}(\varphi) \dots \quad \square$$

⚠ il faut impérativement que
$$B' = B.$$

$$V \supset B$$
$$\;\;\supset B'$$

$$\mathrm{mat}_{B'B} : \mathrm{End}(V) \longrightarrow M_d(K)$$

est juste un isom de K-EV mais pas d'anneaux si $B' \neq B$.

Le groupe Lineaire

Définition 8.8. *Soit V un K-EV de dimension finie. Le groupe lineaire de V est le groupe (pour la composition dans* $\mathrm{End}(V)$*) des elements inversibles de l'algebre* $\mathrm{End}_K(V)$*; son element neutre est l'identite* Id_V *et on note ce groupe*

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{End}_K(V)^\times = \{\varphi : V \mapsto V,\ \varphi \text{ est bijectif}\}.$$

Soit $d \geqslant 1$. Le groupe lineaire de rang d sur K est le groupe des matrices carrees inversibles dans l'algebre $M_d(K)$ pour la multiplication des matrices; son element neutre est la matrice identite Id_d *et on note ce groupe*

$$\mathrm{GL}_d(K) = M_d(K)^\times = \{M \in M_d(K),\ \exists M' \in M_d(K),\ M.M' = M'.M = \mathrm{Id}_d\}.$$

$M' = M^{-1}$

Proposition 8.5. *L'application* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} : \mathrm{End}(V) \mapsto M_d(K)$ *induit un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} : \mathrm{GL}(V) \mapsto \mathrm{GL}_d(K)$$

et en particulier

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)^{-1}.$$

Dernier point: si φ est inversible.

$\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_V$ $\quad$ $\mathrm{mat}_B \varphi \cdot \mathrm{mat}_B(\varphi^{-1}) =$

$\mathrm{mat}_B(Id_V) = Id_d$

Exemple de matrices inversible

B, B' deux base pas forcement égales

$\varphi : V \to V$ φ inversible

$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) \in M_d(K)$

$\mathrm{mat}_{BB'}(\varphi^{-1}) \in M_d(K)$

alors

$$\mathrm{mat}_{BB'}(\varphi^{-1}) \cdot \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi)$$

$$= \mathrm{mat}_{BB}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{B}(Id_V)$$

$$= Id_d$$

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) \in GL_d(K)$$

et $\quad \mathrm{mat}_{B'B}(\varphi)^{-1} = \mathrm{mat}_{BB'}(\varphi^{-1})$

$\varphi = Id_V \qquad \varphi^{-1} = Id_V$ et on a

$$mat_{B'B}(Id_V) \cdot mat_{BB'}(Id_V) = Id_d$$

Critère d'Inversibilité

Théorème 8.7 (Critere d'inversibilite des endomorphismes). *Soit $\varphi : V \mapsto V$ alors les conditions suivantes son equivalentes:*

(1) φ est inversible (ie. bijective),
(2) φ est injective,
(3) φ est surjective,
(4) $\mathrm{rg}(\varphi) = d$,
(5) φ transforme une base de V en une famille libre,
(6) φ transforme une base de V en une famille generatrice

on passe aux matrice par

$$\varphi \longrightarrow \mathrm{mat}_B(\varphi) \in M_d(K)$$

Théorème 8.8 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les colonnes)). *Soit une matrice carree* $M = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} \in M_d(K)$, *les conditions suivantes sont equivalentes*

(1) M *est inversible, ie.* $M \in \mathrm{GL}_d(V)$,
(2) $\mathrm{rg}(M) = d$,
(3) $\{\mathrm{Col}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille libre de* $\mathrm{Col}_d(K)$,
(4) $\{\mathrm{Col}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille generatrice de* $\mathrm{Col}_d(K)$.

Comme $rg(M) = rg({}^tM)$

$$\text{si} \quad \begin{array}{ccc} rg(M) = d & \iff & rg({}^tM) = d \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ M \text{ inversible} & & {}^tM \text{ inversible} \end{array}$$

Théorème 8.9 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les lignes)). *Soit une matrice carree* $M = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} \in M_d(K)$, *les conditions suivantes sont equivalentes*

(1) M *est inversible, ie.* $M \in \mathrm{GL}_d(V)$,
(2) ${}^tM$ *est inversible, ie.* ${}^tM \in \mathrm{GL}_d(V)$,
(3) $\mathrm{rg}({}^tM) = d$,
(4) $\{\mathrm{Lig}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille libre de* $\mathrm{Lig}_d(K)$,
(5) $\{\mathrm{Lig}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille generatrice de* $\mathrm{Lig}_d(K)$.

Proposition 8.6. *La transposition est une bijection de* $\mathrm{GL}_d(K)$ *sur lui-meme qui verifie:*

$$\forall M, N \in \mathrm{GL}_d(K),\ ({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1}),\ {}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM.$$

<u>Preuve</u> Soit M inversible alors on a

$$M.M^{-1} = I_d = M^{-1}.M = I_d$$

$${}^t(M.M^{-1}) = {}^tI_d = I_d$$

$$= {}^t(M^{-1}).{}^tM = I_d = {}^tM.{}^t(M^{-1})$$

$$\Longrightarrow ({}^{t}M)^{-1} = {}^{t}(M^{-1}).$$

$$\square$$