M: Do you know what I’m talking about ?
N: The Matrix ?
M: Do you want to know what IT is ?
The Matrix is everywhere. It is all around us.
Even now, in this very room

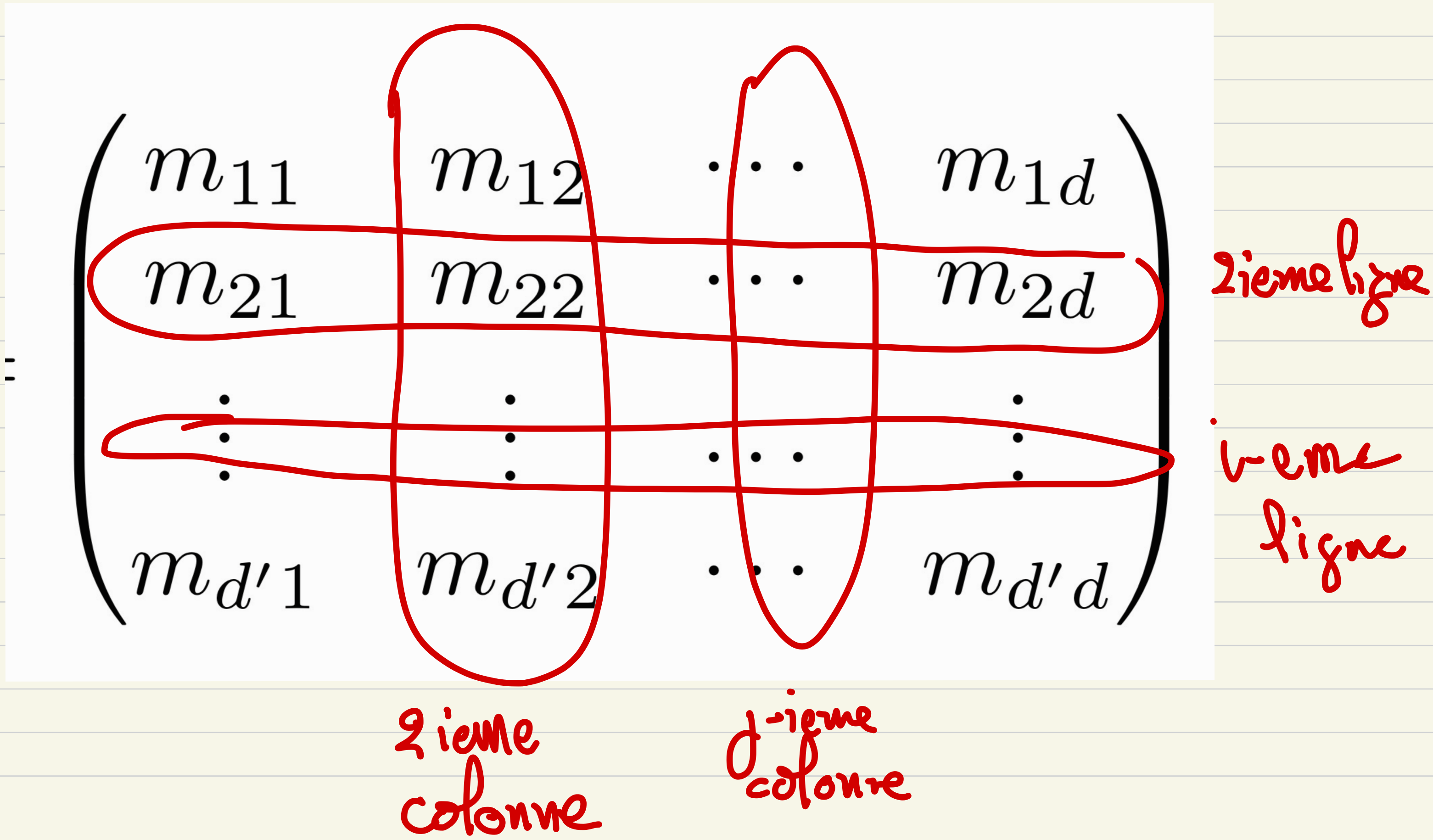
$K^{d'} \times \underset{\shortparallel}{K^{d'}} \times \dots \times K^{d'}$ d-fois

DÉFINITION 8.1. *L'espace vectoriel* $(K^{d'})^d$ *s'appelle l'espace des matrices de dimension* $d' \times d$ *a coefficients dans* K *et est note*

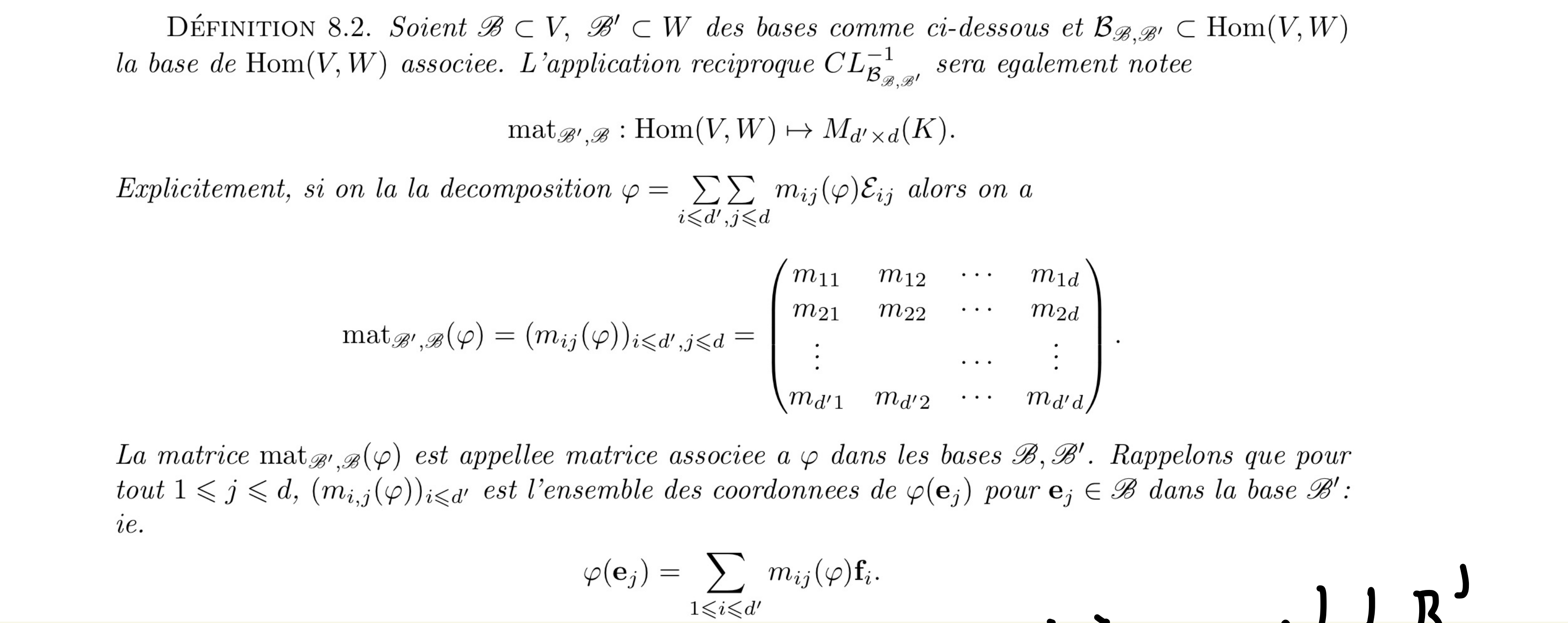
$$M_{d' \times d}(K) = \{(m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d},\ m_{ij} \in K\}.$$

Un element de $M_{d' \times d}(K)$ *est appelle matrice de dimensions* $d' \times d$ *ou juste une matrice* $d' \times d$.

$$M = (m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d} = \textcircled{1}\Big\downarrow \underbrace{\overset{\textcircled{2}\ \longrightarrow}{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}}}_{d \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{d'1} \end{pmatrix}}\right\} d' \text{ lignes}$$



$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \text{2ieme ligne} \\ \text{i-eme ligne} \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & \text{2 ieme colonne} & \text{j-ieme colonne} & \end{matrix} & \end{array}$$



DÉFINITION 8.2. *Soient $\mathscr{B} \subset V$, $\mathscr{B}' \subset W$ des bases comme ci-dessous et $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \subset \mathrm{Hom}(V,W)$ la base de $\mathrm{Hom}(V,W)$ associee. L'application reciproque $CL^{-1}_{\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}$ sera egalement notee*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} : \mathrm{Hom}(V,W) \mapsto M_{d'\times d}(K).$$

Explicitement, si on la la decomposition $\varphi = \sum\sum_{i\leqslant d', j\leqslant d} m_{ij}(\varphi)\mathcal{E}_{ij}$ alors on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij}(\varphi))_{i\leqslant d', j\leqslant d} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi)$ est appellee matrice associee a φ dans les bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$. Rappelons que pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$, $(m_{i,j}(\varphi))_{i\leqslant d'}$ est l'ensemble des coordonnees de $\varphi(\mathbf{e}_j)$ pour $\mathbf{e}_j \in \mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$: ie.

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant d'} m_{ij}(\varphi)\mathbf{f}_i.$$

$$m_{ij}(\varphi) = f_i^*(\varphi(e_j))$$

i-ème coord ds B'
de l'image par φ
du j-ème elts de B

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}$$

les coordonnées de $\varphi(e_2)$
dans la base B'

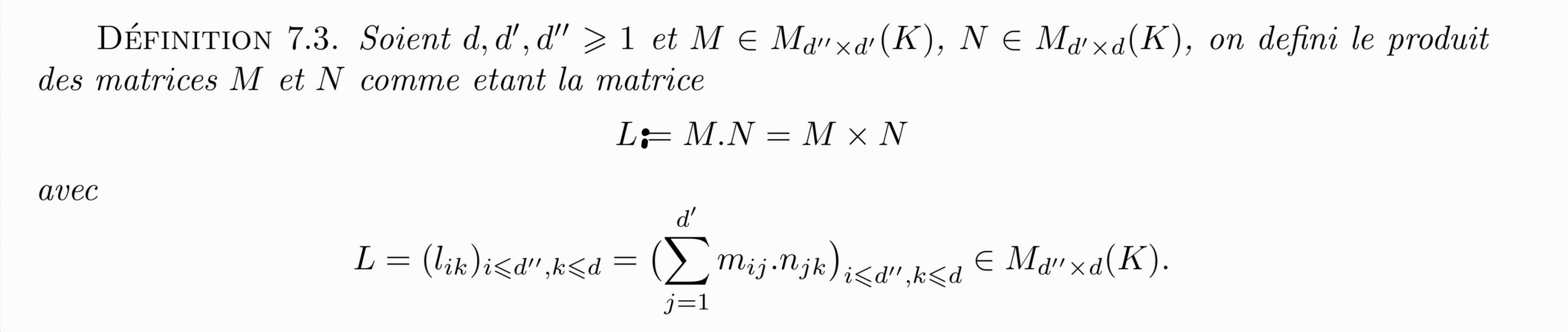
Lignes et Colonnes Extraites

Définition 8.4. *Soit une matrice*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \in M_{d' \times d}(K).$$

Pour $j \leqslant d$ (resp. $i \leqslant d'$), la j-ieme colonne de M (resp. la i-ieme ligne de M) est la matrice colonne (resp. ligne)

$$\mathrm{Col}_j(M) = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{d'j} \end{pmatrix} \in \mathrm{Col}_{d'}(K), \;\; \textit{resp.}\; \mathrm{Lig}_i(M) = \begin{pmatrix} m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{id} \end{pmatrix} \in \mathrm{Lig}_d(K)$$

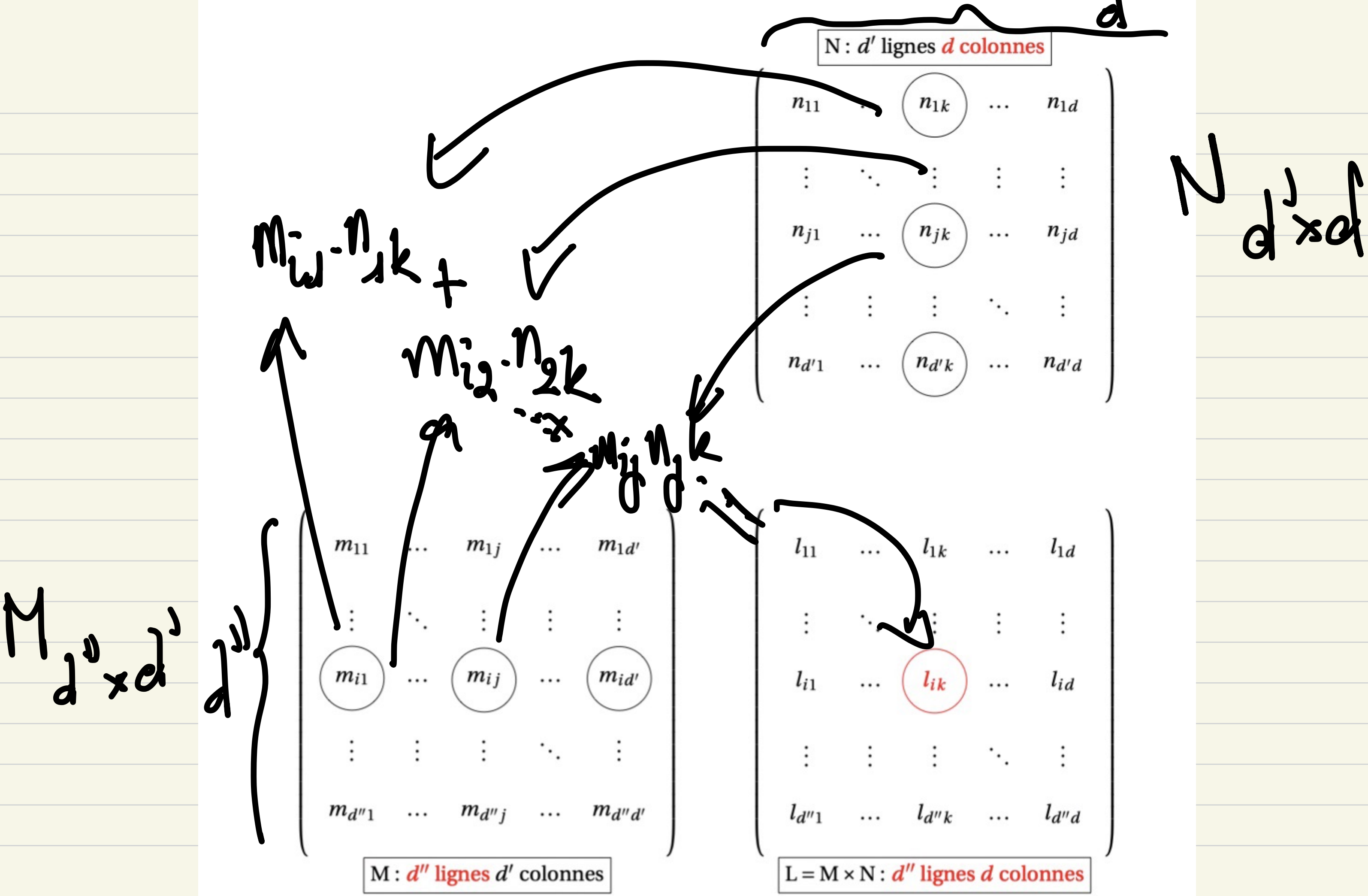


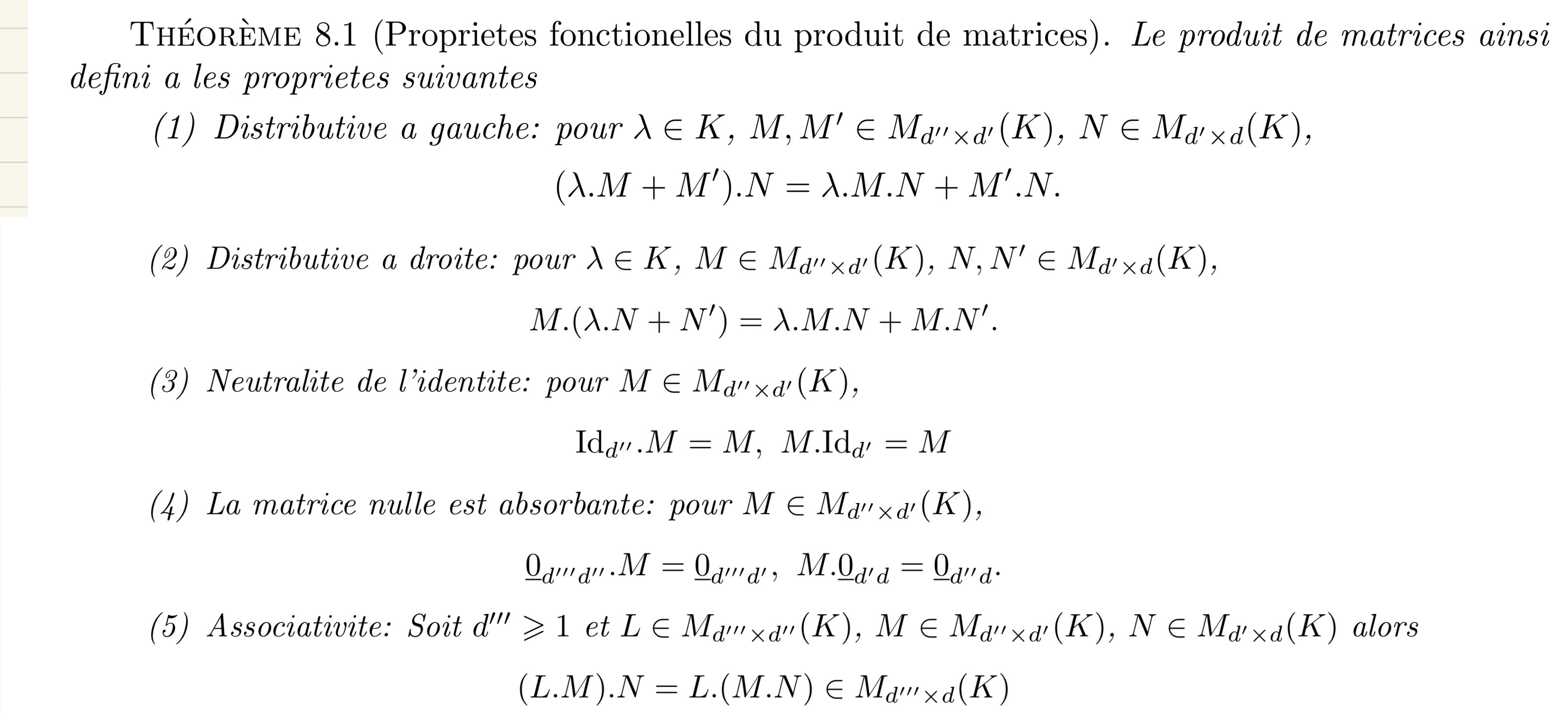
DÉFINITION 7.3. *Soient* $d, d', d'' \geqslant 1$ *et* $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$, *on defini le produit des matrices* M *et* N *comme etant la matrice*

$$L := M.N = M \times N$$

avec

$$L = (l_{ik})_{i \leqslant d'', k \leqslant d} = \Big(\sum_{j=1}^{d'} m_{ij}.n_{jk}\Big)_{i \leqslant d'', k \leqslant d} \in M_{d'' \times d}(K).$$


N : d' lignes d colonnes
d
$N_{d' \times d}$
$m_{i1} \cdot n_{1k} +$
$m_{i2} \cdot n_{2k}$
$+ \dots +$
$m_{id'} n_{d'k}$
$=$
$M_{d'' \times d'}$
d''
n_{11} … n_{1k} … n_{1d}
n_{j1} … n_{jk} … n_{jd}
$n_{d'1}$ … $n_{d'k}$ … $n_{d'd}$
m_{11} … m_{1j} … $m_{1d'}$
m_{i1} … m_{ij} … $m_{id'}$
$m_{d''1}$ … $m_{d''j}$ … $m_{d''d'}$
l_{11} … l_{1k} … l_{1d}
l_{i1} … l_{ik} … l_{id}
$l_{d''1}$ … $l_{d''k}$ … $l_{d''d}$
M : d'' lignes d' colonnes
L = M × N : d'' lignes d colonnes



THÉORÈME 8.1 (Proprietes fonctionelles du produit de matrices). *Le produit de matrices ainsi defini a les proprietes suivantes*

1. *Distributive a gauche: pour* $\lambda \in K$, $M, M' \in M_{d''\times d'}(K)$, $N \in M_{d'\times d}(K)$,
$$(\lambda.M + M').N = \lambda.M.N + M'.N.$$
2. *Distributive a droite: pour* $\lambda \in K$, $M \in M_{d''\times d'}(K)$, $N, N' \in M_{d'\times d}(K)$,
$$M.(\lambda.N + N') = \lambda.M.N + M.N'.$$
3. *Neutralite de l'identite: pour* $M \in M_{d''\times d'}(K)$,
$$\mathrm{Id}_{d''}.M = M,\ \ M.\mathrm{Id}_{d'} = M$$
4. *La matrice nulle est absorbante: pour* $M \in M_{d''\times d'}(K)$,
$$\underline{0}_{d'''d''}.M = \underline{0}_{d'''d'},\ \ M.\underline{0}_{d'd} = \underline{0}_{d''d}.$$
5. *Associativite: Soit* $d''' \geqslant 1$ *et* $L \in M_{d'''\times d''}(K)$, $M \in M_{d''\times d'}(K)$, $N \in M_{d'\times d}(K)$ *alors*
$$(L.M).N = L.(M.N) \in M_{d'''\times d}(K)$$

THÉORÈME 8.2. *Soit* U, V, W *des espaces vectoriels de dimensions* d, d', d'' *et* $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ *des bases. Soient des applications lineaires*

$$\varphi : U \mapsto V,\ \ \psi : V \mapsto W \ \ \textit{avec}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (n_{jk})_{jk},\ \ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi) = (m_{ij})_{ij}, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = (l_{ik})_{ik}$$

alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) \tag{8.1.3}$$

Autrement dit on a

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1d} \\ l_{21} & \cdots & l_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{d''1} & \cdots & l_{d''d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d'} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d''1} & m_{d''2} & \cdots & m_{d''d'} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1d} \\ n_{21} & \cdots & n_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ n_{d'1} & \cdots & n_{d'd} \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 8.1. *Soit $\mathscr{B} \subset V$, $\mathscr{B}' \subset W$ des bases, $v \in V$ un vecteur de coordonnees $(x_j)_{j \leqslant d}$ dans la base $\mathscr{B}$ (ie. $v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d$) et $(y_i)_{i \leqslant d'}$ les coordonnees de $\varphi(v)$ dans la base $\mathscr{B}'$ (ie. $\varphi(v) = y_1.\mathbf{f}_1 + \cdots + y_{d'}.\mathbf{f}_{d'}$). On associe a v et $\varphi(v)$ leurs matrices colonnes (de hauteurs d et $\mathrm{d}' =$*

$$\mathrm{Col}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \ \mathrm{Col}_{\mathscr{B}'}(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix}$$

alors on a la relation

$$\mathrm{Col}_{\mathscr{B}'}(\varphi(v)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{Col}_{\mathscr{B}}(v).$$

Autrement dit si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d}$, *on a*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

Proposition 8.2. *soit* $\varphi : V \simeq W$ *un isomorphisme lineaire et* $\varphi^{-1} : W \mapsto V$ *la reciproque. On a les relations*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi^{-1}).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{Id}_d,$$
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi^{-1}) = \mathrm{Id}_d.$$

En particulier si $V = W$ *et* $\varphi = \mathrm{Id}_V$ *est l'identite on a*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_V).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_d. \tag{8.1.4}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & W \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
B & B' & B''
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\psi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi)$$

Rang d'une Matrice

DÉFINITION 8.6. *Soit* $M \in M_{d' \times d}(K)$*, le rang d'une matrice* M *est la dimension de l'espace engendre par des* d *colonnes de* M *dans* $\mathrm{Col}_{d'}(K)$*:*

$$\mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Vect}(\{\mathrm{Col}_j(M),\ j \leqslant d\}).$$

Autrement dit $\mathrm{rg}(M)$ *est la taille maximale d'une sous-famille libre de la famille* $\{\mathrm{Col}_j(M),\ j \leqslant d\}$ *des colonnes de* M*.*

Matrice de Rang r : $\quad r \leq \min(d, d')$

$$I_{d' \times d}(r) = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{matrix}}_{r} \; r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{d}\right\} d'$$

Transposition

Théorème (Matrice de l'application duale). *Soit* $\varphi : V \mapsto W$ *une application lineaire;* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *des bases de* V *et* V' *et*

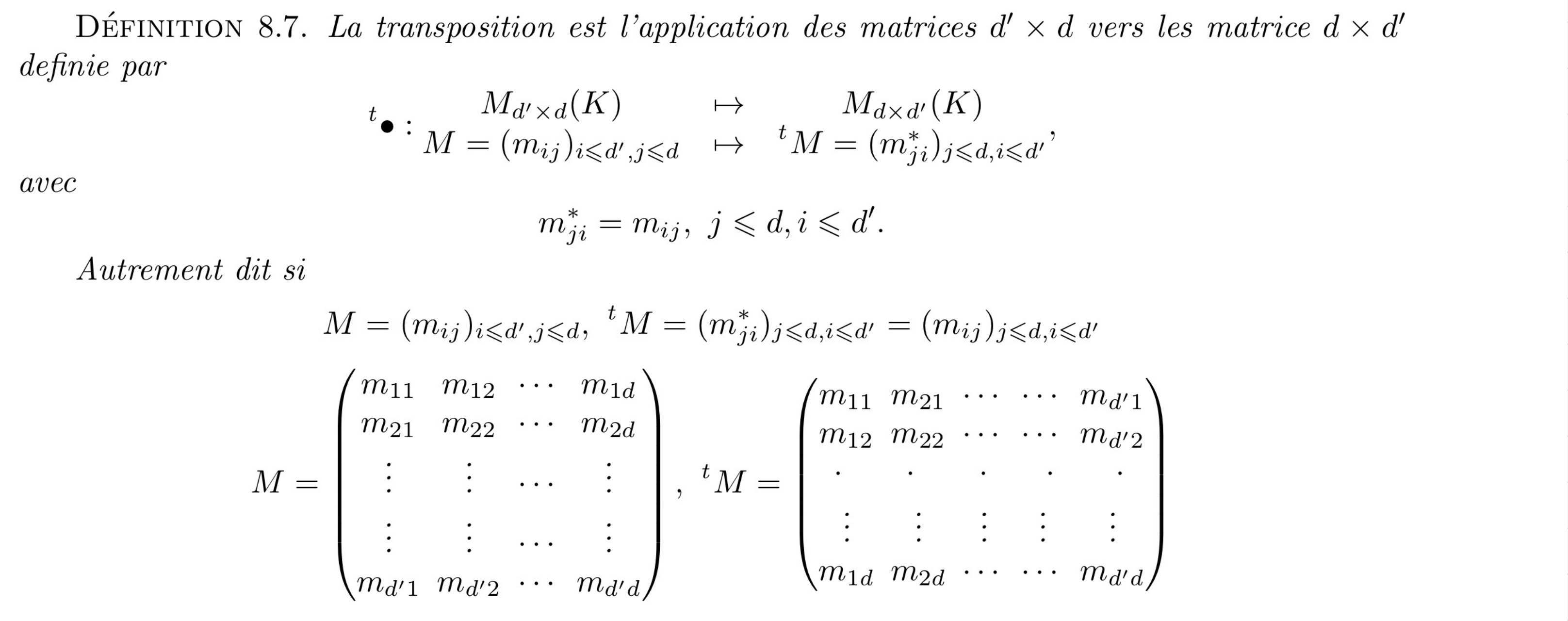
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i\leqslant d',j\leqslant d}$$

la matrice de φ *dans les bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *et soit*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}^*,\mathscr{B}'^*}(\varphi^*) = (m^*_{ji})_{j\leqslant d,i\leqslant d'}$$

la matrice de φ^* *dans les bases* $\mathscr{B}'^*$ *et* $\mathscr{B}^*$ *alors on a*

$$m^*_{ji} = m_{ij},\ i \leqslant d',\ j \leqslant d$$



Définition 8.7. *La transposition est l'application des matrices $d' \times d$ vers les matrice $d \times d'$ definie par*

$$ {}^t\bullet : \begin{array}{ccc} M_{d'\times d}(K) & \mapsto & M_{d\times d'}(K) \\ M=(m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d} & \mapsto & {}^tM=(m^*_{ji})_{j\leqslant d, i\leqslant d'} \end{array}, $$

avec

$$ m^*_{ji} = m_{ij},\ j \leqslant d, i \leqslant d'. $$

Autrement dit si

$$ M=(m_{ij})_{i\leqslant d', j\leqslant d},\ {}^tM=(m^*_{ji})_{j\leqslant d, i\leqslant d'} = (m_{ij})_{j\leqslant d, i\leqslant d'} $$

$$ M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix},\ {}^tM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots & \cdots & m_{d'1} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & \cdots & m_{d'2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1d} & m_{2d} & \cdots & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} $$

$$ {}^t\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = \mathrm{mat}_{B^*B'^*}(\varphi^*) $$

Théorème 8.3. *(Proprietes fonctionelles de la transposition) La transposition a les proprietes suivantes:*

1. *Linearite:* ${}^t(\lambda.M + M') = \lambda{}^tM + {}^tM'$.
2. *Involutivite:* ${}^t({}^tM) = M$.
3. *Anti-multiplicativite: pour* $M \in M_{d'',d'}(K)$, $N \in M_{d',d}(K)$, $M.N \in M_{d'',d}(K)$ *et*

$$ {}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM. $$

Preuve: par un calcul direct.

par les propriétés analogues de l'application

- $\varphi \to \varphi^*$. est lineaire
- $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ | $\varphi^{**} = \varphi$ si on identifie V^{**} a V par l'evaluation.

Rang de la transposée

THÉORÈME 8.4 (Invariance du rang par transposition). *Soit* $M \in M_{d' \times d}(K)$ *on a*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM).$$

Preuve: on a mq $\varphi : V \to W$ et $\varphi^* : W^* \to V^*$ alors

$$\mathrm{rg}(\varphi^*) = \mathrm{rg}(\varphi)$$

Corollaire 8.1. *La rang d'une matrice est egal a la dimension de l'espace K^d engendre par les vecteurs lignes de M*

$$\mathrm{rg}(M) = \dim_K \mathrm{Vect}(\mathrm{Lig}_j(M),\ j = 1, \cdots, d').$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \dim \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \dim \mathrm{Vect}\left\{(1,2,3),\ (4,5,6)\right\}$$

Algebre des Matrices Carrées

THÉORÈME 8.5. *L'espace $M_d(K)$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication est un anneau (non-commutatif en general) dont l'element neutre est la matrice carree nulle $\underline{0}_d = \underline{0}_{d\times d}$ et dont l'unite est la matrice identite Id_d. De plus la structure de K-EV de $M_d(K)$ fait de l'anneau $(M_d(K), +, .)$ une K-algebre (de dimension d^2).*

On l'appelle l'algebre des matrices carres de dimension d (ou de rang d) sur le corps K (ou a coefficient dans K).

Vu pour $d=2$

Théorème 8.6. *Soit V de dimension finie d et $\mathscr{B}$ une base de V, l'application*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} : \mathrm{End}(V) \mapsto M_d(K)$$

est un isomorphisme d'anneaux (et donc de K-algebres) pour les lois d'addition et de multiplication decrites precedemment.

Preuve : on sait que mat_B est un iso de K-ev

il "suffit" de verifie que mat_B est multiplicative

$$\mathrm{mat}_B(\psi \circ \varphi) = \mathrm{mat}_{BB}(\psi \circ \varphi)$$

$$= \mathrm{mat}_{BB}(\psi) \circ \mathrm{mat}_{BB}(\varphi) \dots \quad \square$$

Le groupe Linéaire

Définition 8.8. *Soit V un K-EV de dimension finie. Le groupe lineaire de V est le groupe (pour la composition dans* $\mathrm{End}(V)$*) des elements inversibles de l'algebre* $\mathrm{End}_K(V)$*; son element neutre est l'identite* Id_V *et on note ce groupe*

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{End}_K(V)^{\times} = \{\varphi : V \mapsto V,\ \varphi \textit{ est bijectif}\}.$$

Soit $d \geqslant 1$. Le groupe lineaire de rang d sur K est le groupe des matrices carrees inversibles dans l'algebre $M_d(K)$ pour la multiplication des matrices; son element neutre est la matrice identite Id_d *et on note ce groupe*

$$\mathrm{GL}_d(K) = M_d(K)^{\times} = \{M \in M_d(K),\ \exists M' \in M_d(K),\ M.M' = M'.M = \mathrm{Id}_d\}.$$

$M' = M^{-1}$

Proposition 8.5. *L'application* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} : \mathrm{End}(V) \mapsto M_d(K)$ *induit un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} : \mathrm{GL}(V) \mapsto \mathrm{GL}_d(K)$$

et en particulier

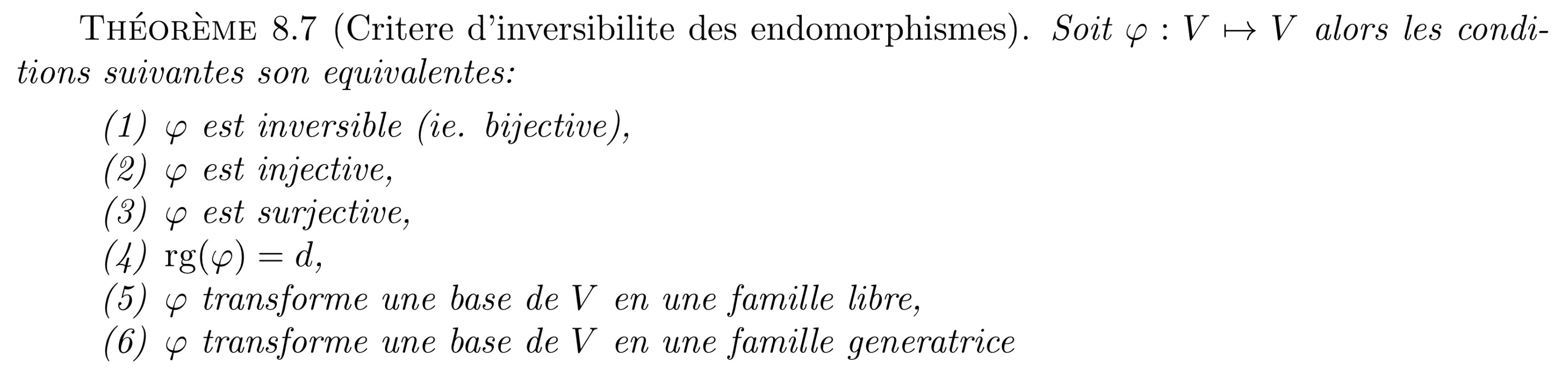
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)^{-1}.$$

Dernier point: si φ est inversible.

$\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_V$ $\quad$ $mat_B \varphi \cdot mat_B(\varphi^{-1}) =$

$mat_D(Id_V) = Id_d$

Critère d'Inversibilité



Théorème 8.7 (Critere d'inversibilite des endomorphismes). *Soit* $\varphi : V \mapsto V$ *alors les conditions suivantes son equivalentes:*

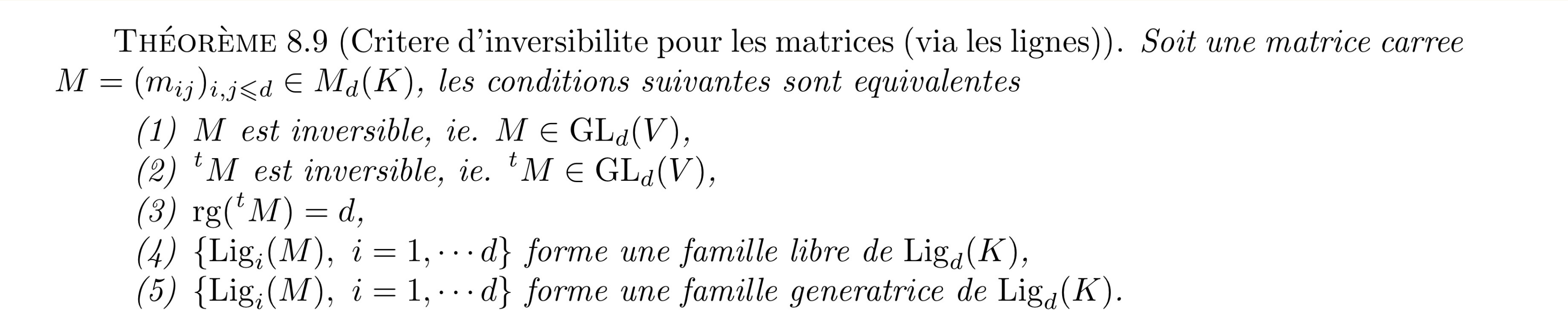
(1) φ *est inversible (ie. bijective),*
(2) φ *est injective,*
(3) φ *est surjective,*
(4) $\mathrm{rg}(\varphi) = d$,
(5) φ *transforme une base de* V *en une famille libre,*
(6) φ *transforme une base de* V *en une famille generatrice*

on passe aux matrice par

$$\varphi \longrightarrow \mathrm{mat}_B(\varphi) \in M_d(K)$$

Théorème 8.8 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les colonnes)). *Soit une matrice carree* $M = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} \in M_d(K)$, *les conditions suivantes sont equivalentes*

1. M *est inversible, ie.* $M \in \mathrm{GL}_d(V)$,
2. $\mathrm{rg}(M) = d$,
3. $\{\mathrm{Col}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille libre de* $\mathrm{Col}_d(K)$,
4. $\{\mathrm{Col}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille generatrice de* $\mathrm{Col}_d(K)$.



THÉORÈME 8.9 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les lignes)). *Soit une matrice carree* $M = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} \in M_d(K)$, *les conditions suivantes sont equivalentes*

- *(1)* M *est inversible, ie.* $M \in \mathrm{GL}_d(V)$,
- *(2)* ${}^tM$ *est inversible, ie.* ${}^tM \in \mathrm{GL}_d(V)$,
- *(3)* $\mathrm{rg}({}^tM) = d$,
- *(4)* $\{\mathrm{Lig}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille libre de* $\mathrm{Lig}_d(K)$,
- *(5)* $\{\mathrm{Lig}_i(M),\ i = 1, \cdots d\}$ *forme une famille generatrice de* $\mathrm{Lig}_d(K)$.

Proposition 8.6. *La transposition est une bijection de* $\mathrm{GL}_d(K)$ *sur lui-meme qui verifie:*

$$\forall M, N \in \mathrm{GL}_d(K),\ ({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1}),\ {}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM.$$

__Preuve__ Soit M inversible alors on a

$$M.M^{-1} = Id_d = M^{-1}.M = Id$$

$${}^t(M.M^{-1}) = {}^tId_d = Id_d$$

$$= {}^t(M^{-1}).{}^tM = Id_d = {}^tM.{}^t(M^{-1})$$

Changement de

Bases

$$\begin{array}{lcc} \varphi : \; V & \longrightarrow & W \\ \quad\;\; \cup & & \cup \\ \quad\;\; U & & U \\ \quad B, B_n & & B', B'_n \end{array}$$

relation entre

$\mathrm{mat}_{B'B}\,\varphi$ et $\mathrm{mat}_{B'_n B_n}\,\varphi$?

Théorème 8.10 (Formule de changement de base). *Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}_n \subset V$ et $\mathscr{B}', \mathscr{B}'_n \subset W$ des bases de V et W. On a la relation*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}_n}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_W).\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n}(\mathrm{Id}_V).$$

Preuve: on a que

$$\varphi = \mathrm{Id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_V$$

on applique x2 fois la formule composition/Produit.

Définition 8.9. *La matrice carree de taille* $d = \dim V$,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n} := \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n}(\mathrm{Id}_V)$$

est appelle matrice de changement de base, de la base $\mathscr{B}$ *a la base* $\mathscr{B}_n$ *ou encore la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *a* $\mathscr{B}_n$.

Sa j*-ieme colonne est formee par les coordonnees du* j*-ieme vecteur* $\mathbf{e}_{nj}$ *exprime comme combinaison lineaire dans la base* $\mathscr{B}$*. La formule de changement de base se reecrit alors*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}_n}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n,\mathscr{B}'}.\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\varphi).\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_n}.$$

$\mathrm{mat}^{-1}_{B',B'_n}$ ↘

matrice dont les colonnes sont formées des coord du i-ieme vecteur f_i ds la base $\{f^n_i, i \leq d\}$

Propriétés des Matrices de changement de base.

PROPOSITION 8.7. *Soit trois bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subset V$ on a*

1. *Formule d'inversion:*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}.\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}} = \mathrm{Id}_d.$$

En particulier une matrice de passage est inversible (dans $M_d(K)$) et son inverse est la matrice de passage de la base initiale a la nouvelle base:

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}.$$

2. *Formule de transitivite:*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}.\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$$

Preuve: formule Compos/Produit appliquée a Id_V pour diverses bases de V.

Ecriture de la formule de changement de Base ds le cas $V = W$

et $B = B'$ $B_n = B'_n$

$$\mathrm{mat}_{B_n} = \mathrm{mat}_{B_nB_n}(\varphi) = \mathrm{mat}_{B_nB}(Id_V).\mathrm{mat}_{BB}(\varphi).\mathrm{mat}_{BB_n}(Id_V)$$

$$= \mathrm{mat}_{BB_n}(Id_V)^{-1}.\mathrm{mat}_{BB}(\varphi).\mathrm{mat}_{BB_n}(Id_V)$$

$$= \mathrm{mat}_{BB_n}^{-1}.\mathrm{mat}_{B}(\varphi).\mathrm{mat}_{BB_n}.$$

Exemple

$V = K^2 \quad B = B_2^0 = \{(1,0), (0,1)\}$

$B_n = \{(1,3), (1,2)\}$ = base ∀ Cor(K)

$(1,3) = 1(1\,0) + 3(0\,1)$

$$\text{mat}_{BB_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mat}_{B_nB} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices Equivalentes

$$\begin{array}{ccc} \varphi : V & \longrightarrow & W \\ \cup & & \cup \\ B, B_n & & B', B'_n \end{array}$$

$$\underset{B'_n B_n}{\mathrm{mat}} \varphi = \mathrm{mat}_{B'_n B'} . \mathrm{mat}_{B'B} (\varphi) . \mathrm{mat}_{B B_n}$$

$$\cap$$

$$N = \underset{\substack{\cap \\ Gl_{d'}(K)}}{A} . M . \underset{\substack{\cap \\ Gl_d(K)}}{B}$$

Définition 8.10. *Deux matrices* $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ *sont dites equivalentes si il existe des matrices inversibles* $A \in \mathrm{GL}_{d'}(K)$, $B \in \mathrm{GL}_d(K)$ *telles que*

$$N = A.M.B.$$

Exemple: deux matrice representant la m̂ application lineaires ds 2 paires de bases sont equivalente.

Proposition 8.8. *Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont equivalentes ssi il existe V de dimension d et W de dimension d', des bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}_n \subset V$ et $\mathscr{B}', \mathscr{B}'_n \subset W$ et une application lineaire $\varphi : V \mapsto W$ telle que*

$$M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\varphi),\ N = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_n\mathscr{B}_n}(\varphi)$$

Preuve: Supposons $N = AMB$ avec A et B inversibles

alors on a $M = A^{-1} N B^{-1}$

les colonnes de A^{-1} et B^{-1} formes des bases des K-EV des vecteurs colonnes de taille d' et d

on prend $V = K^d$ $W = K^{d'}$, B_n, B'_n les bases canoniques de K^d et $K^{d'}$ et φ l'application linéaire dont les coord de l'image du j-ieme vecteur de la Base canonique de K^d est donnée par le j-ieme vecteur colonne de N $N = \text{mat}_{B'_n B_n}(\varphi : K^d \to K^{d'})$

Soit B la base de K^d dont les coord ds la base canonique sont données par les colonnes de B^{-1} :

$$B^{-1} = \mathrm{mat}_{B_n B} \qquad B = \mathrm{mat}_{B B_n}$$

Soit B' la base de $K^{d'}$ dont les coordonnées ds la base canonique de $K^{d'}$ sont les colonnes de A

$$A = \mathrm{mat}_{B'_n B'} \qquad A^{-1} = \mathrm{mat}_{B' B'_n}$$

par la formule du changement de base

on a

$$\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = \mathrm{mat}_{B'B_n'} \cdot \mathrm{mat}_{B_n'B_n}(\varphi) \cdot \mathrm{mat}_{B_nB}$$

$$H = A^{-1} \cdot N \cdot B^{-1}$$

$$\square$$

Prop: la relation sur $M_{d' \times d}(K)$ "être equivalente" est une relation d'equi~~va~~lence.

Preuve : - Reflexive: $M = Id_{d'} . M . Id_d$

$M \sim M$

- Symetrique: $N = AMB$ alors

A, B inversibles $M = A^{-1} N B^{-1}$

Transitive : $N = AMB$ $\quad O = A'NB'$

$$O = A'A.M.BB'$$

et $A'.A$ sont inversible ($GL_{d'}(K)$ sont stable
$B.B'$ $\qquad GL_d(K)$ par produit)

$\square$

Théorème 8.11. *Soient $M, N \in M_{d' \times d}(K)$. Les conditions suivantes sont equivalentes*

(1) *M et N sont equivalentes,*
(2) $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$,
(3) *M et N sont equivalentes a $I_{d' \times d}(r)$.*

Preuve : par la prop M et N sont $\sim$ elles representent la m̂ application lineaire $\varphi : V \longrightarrow W$

- $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}(\varphi)$

et si φ est de rg r il existe (Thm Noyau-Image) des base B, B' tq $\mathrm{mat}_{B'B}(\varphi) = I_{d' \times d}(r)$ $\square$

Pour la relation sur $M_{d'\times d}(K)$ "être equivalentes"

il y a $\min(d,d')+1$ classe déquivalences

les differents rang possible pour des matrices

$d'\times d$: $0, 1, \ldots, \min(d,d')$

et les representants des classes sont les

$I_{d'\times d}(r)$ $0 < r \leq \min(d,d')$ •

Conjugaison

$$\varphi : \underset{\substack{\cup \\ B,\, B_n}}{V} \longrightarrow \underset{\substack{\cup \\ B,\, B_n}}{V} \qquad \varphi \in \operatorname{End}(V)$$

$$\boxed{\text{mat}_{BB_n} = \text{mat}_{B_nB}^{-1}}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ N}}{\text{mat}_{B_n}(\varphi)} = \underset{C}{\text{mat}_{B_nB}} \cdot \underset{M}{\text{mat}_B(\varphi)} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ C^{-1}}}{\text{mat}_{BB_n}}$$

DÉFINITION 8.11. *On dit que deux matrices M, N sont semblables ou conjuguees si il existe $C \in GL_d(K)$ tel que*

$$N = C.M.C^{-1}. \quad \in M_d(K)$$

La relation "etre semblables" ou "etre conjuguees" est une relation d'equivalence.

Une classe d'equivalence pour cette relation, l'ensemble des matrices de la forme

$$M^{\natural} := \mathrm{Ad}(\mathrm{GL}_d(K))(M) = \{C.M.C^{-1},\ C \in \mathrm{GL}_d(K)\}$$

est appellee classe de conjugaison (de M) et on note

$$M_d(K)^{\natural}\ \text{[redacted]} = M_d(K)/\sim$$

l'ensemble des classes de conjugaison.

Exo: Verifier qu'on a bien une relation d'equivalence.

Rmq: $M = \mathrm{mat}_B(\varphi)$ $N = \mathrm{mat}_{B_1}(\phi)$

M et N sont semblables / Conjuguées

$$N = C M C^{-1}$$

avec $C = \mathrm{mat}_{B_1 B}$.

Reciproquement si M et N sont semblables il existe V $\varphi : V \to V$ et des base

B et B_1 tq

$$M = \mathrm{mat}_B(\varphi) \quad N = \mathrm{mat}_{B_1}(\varphi).$$

<u>Rmq</u> (semblable vs equivalentes)

Si M et N sont semblables alors

M et N sont equivalentes:

$N = CMC^{-1} = AMB \quad A = C \quad B = C^{-1}$

M et N ont m̂ rang.

La reciproque est fausse et l'espace des classes de conjugaison

$M_d(K)^{F}$ et tres compliqué

- Si K est un corps alg clos ($K = \mathbb{C}$) la description de $M_d(\mathbb{C})^{F}$ s'appelle Decomposition de Jordan (AL2).

Conjugaison

DÉFINITION 8.12. *Soit $C \in GL_d(K)$ une matrice inversible. Note note* $\mathrm{Ad}(C)$ *l'application dite de conjugaison par C:*

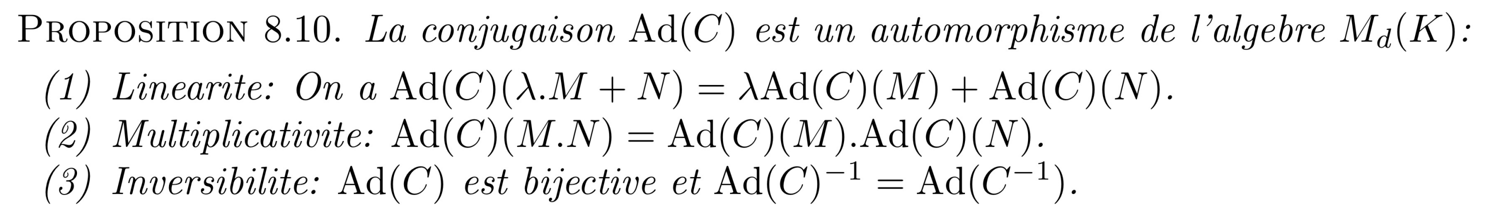
$$\mathrm{Ad}(C) : \begin{array}{ccc} M_d(K) & \mapsto & M_d(K) \\ M & \mapsto & C.M.C^{-1}. \end{array}$$

<u>Exemple</u> : Changement de Base

si $M = \mathrm{mat}_B(\varphi)$

$$\mathrm{mat}_{B_n}(\varphi) = C M C^{-1} \quad C = \mathrm{mat}_{B_n B}$$

$$= \mathrm{Ad}(C)(M)$$



PROPOSITION 8.10. *La conjugaison* $\mathrm{Ad}(C)$ *est un automorphisme de l'algebre* $M_d(K)$*:*

1. *(1) Linearite: On a* $\mathrm{Ad}(C)(\lambda.M+N)=\lambda\mathrm{Ad}(C)(M)+\mathrm{Ad}(C)(N)$.
2. *(2) Multiplicativite:* $\mathrm{Ad}(C)(M.N)=\mathrm{Ad}(C)(M).\mathrm{Ad}(C)(N)$.
3. *(3) Inversibilite:* $\mathrm{Ad}(C)$ *est bijective et* $\mathrm{Ad}(C)^{-1}=\mathrm{Ad}(C^{-1})$.

Preuve : $Ad(C)(\lambda M+N) = C(\lambda M+N).C^{-1}$

$$= (\lambda CM+CN).C^{-1}$$

$$= \lambda CMC^{-1} + CNC^{-1}$$

$$= \lambda Ad(C)(M) + Ad(C)N$$

$$Ad(C)(MN) = CMNC^{-1}$$

$$= CMC^{-1}CNC^{-1}$$

$$= Ad(C)(M) \cdot Ad(C)(N)$$

$$Ad(C^{-1})(Ad(C)M) = C^{-1}(CMC^{-1})(C^{-1})^{-1}$$

$$= C^{-1}CMC^{-1}C = M$$

$$Ad(C^{-1}) \circ Ad(C) = Id_{M_d(K)} \qquad \square$$

On dispose donc d'une application

$$\mathrm{Ad}(\bullet) : C \in \mathrm{GL}_d(K) \mapsto \mathrm{Aut}(M_d(K)) \simeq \mathrm{GL}_{d^2}(K)$$

$\mathrm{Ad}(C)$

appellee application *adjointe*.

PROPOSITION 8.11. *L'application adjointe* $\mathrm{Ad}(\bullet)$ *est un morphisme de groupes et definit donc une action a gauche* $\mathrm{GL}_d(K) \curvearrowright M_d(K)$. *Son noyau est forme par les matrices scalaires:*

$$\ker \mathrm{Ad} = K^\times \mathrm{Id}_d$$

Preuve: On a vu que $\mathrm{Ad}(C)^{-1} = \mathrm{Ad}(C^{-1})$

On veut mq $\mathrm{Ad}(B.C) = \mathrm{Ad}(B) \circ \mathrm{Ad}(C)$

si B et $C \in GL_d(K)$

$$
\begin{aligned}
Ad(BC)(M) &= BC.M.(BC)^{-1} \\
&= B.C.M.C^{-1}B^{-1} \\
&= B.Ad(C)(M).B^{-1} \\
&= Ad(B)\big(Ad(C)(M)\big) \\
&= Ad(B)\circ Ad(C)(M) \checkmark
\end{aligned}
$$

$$\ker(Ad(\bullet)) = \{C \text{ tq } Ad(C) = Id_{M_2(K)}\}$$

$$Ad(C) = Id_{M_2(K)} \iff$$

$$\forall M \in M_2(K) \quad CMC^{-1} = M$$

$$\iff$$

$$CM = MC$$

- $K^{\times} Id_d \subset \ker(Ad)$

Soit M et $C = \lambda Id_d$ $\lambda \in K^{\times}$

on calcule

$$(\lambda Id).M.(\lambda Id)^{-1}$$

$$= \lambda Id.M.\lambda^{-1} Id = \lambda \lambda^{-1} Id M Id$$

$$= 1_K . M = M.$$

On va tester la propriete sur

la base $D_d^0 = \{ E_{ij} \quad i,j \leq d \}$

On veut mq si $\forall i,j$

$$C E_{ij} = E_{ij} . C \text{ alors } C = \lambda \mathrm{Id} \quad \lambda \in K^*$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \ \lambda \end{pmatrix}$$

$$C = \sum_{k \leq d} \sum_{l \leq d} c_{kl} E_{kl}$$

$$C . E_{ij} = \sum_{k} \sum_{l} c_{kl} E_{kl} E_{ij}$$

$$= \sum_{k} \sum_{l} c_{kl} \delta_{l=i} E_{kj}$$

$$= \sum_{k} c_{ki} E_{kj}$$

$$E_{ij} \cdot C = \sum_k \sum_l c_{kl} E_{ij} E_{kl}$$

$$= \sum_k \sum_l c_{kl} \delta_{j=k} E_{il}$$

$$= \sum_l c_{jl} E_{il}$$

$$= \sum_k c_{ki} E_{kj}$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{E_{ij}C}}{\sum_{l \leq d} c_{jl} E_{il}} = \underset{\overset{\shortparallel}{CE_{ij}}}{\sum_{k \leq d} c_{ki} E_{kj}}$$

$\forall i,j \leq d$

Ca impose que $c_{ki}=0$ sauf si $k=i$

et $c_{jl}=0$ sauf si $l=j$

en variant i et j on a $c_{ij}=0$ sauf si $i=j$

$$CE_{ij} = c_{ii}E_{ij}$$

$$E_{ij}C = c_{jj}E_{ij}$$

$$\Longrightarrow c_{ii} = c_{jj}.$$

$$\Longrightarrow C E_{ij} = c_{ii} E_{ii} = E_{ij} C = c_{jj} E_{jj}$$

$$\Longrightarrow i = j \quad c_{ii} = c_{jj} \ \forall i,j$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & & 0 & \\ & c_{11} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & c_{11} \end{pmatrix} = \underset{\underset{0_K}{\neq}}{c_{11}} Id$$

L'image dans $\mathrm{Aut}(M_d(K))$ de l'application Ad s'appelle le gpe des automorphismes intérieurs de $M_d(K)$.

Conjugaison des endomorphismes

V = K-ev l'algebre

$\mathrm{End}_K(V)$ est munie d'une

action du gpe $\mathrm{End}_K(V)^\times = GL(V)$

$= \mathrm{Aut}_K(V)$

par conjugaison

$\psi \in \mathrm{Aut}(V)$

$$\mathrm{Ad}(\psi) : \varphi \in \mathrm{End}(V) \longrightarrow \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} \in \mathrm{End}(V)$$

c'est un automorphisme du K-EV End(V) et fin un automorphisme d'algebre et

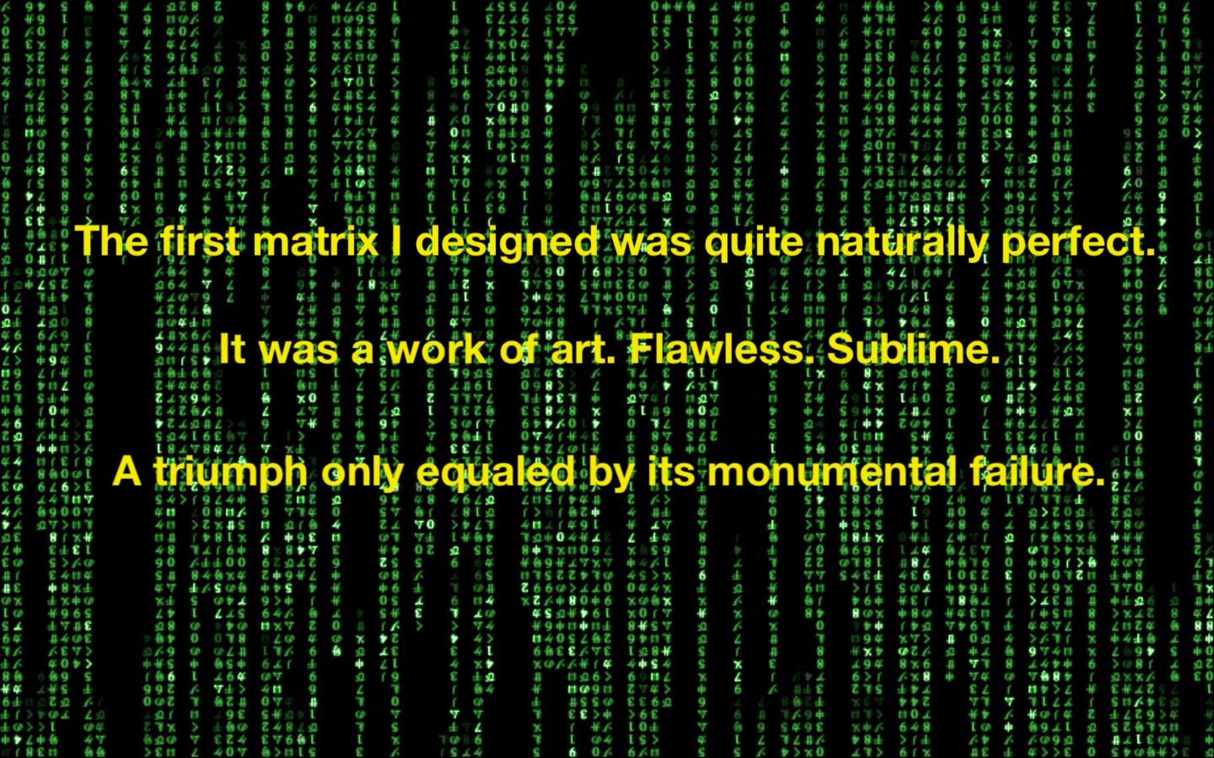
$$\psi \in GL(V) \longrightarrow \mathrm{Ad}(\psi) \in \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(V))$$

est un morphisme

dont le noyau est l'ensemble des homotheties non-nulles

$$\ker \mathrm{Ad} = \{ \lambda . \mathrm{Id}_V \quad \lambda \in K^{*} \}$$

$$\lambda \mathrm{Id}_V : v \in V \longrightarrow \lambda . v \in V$$



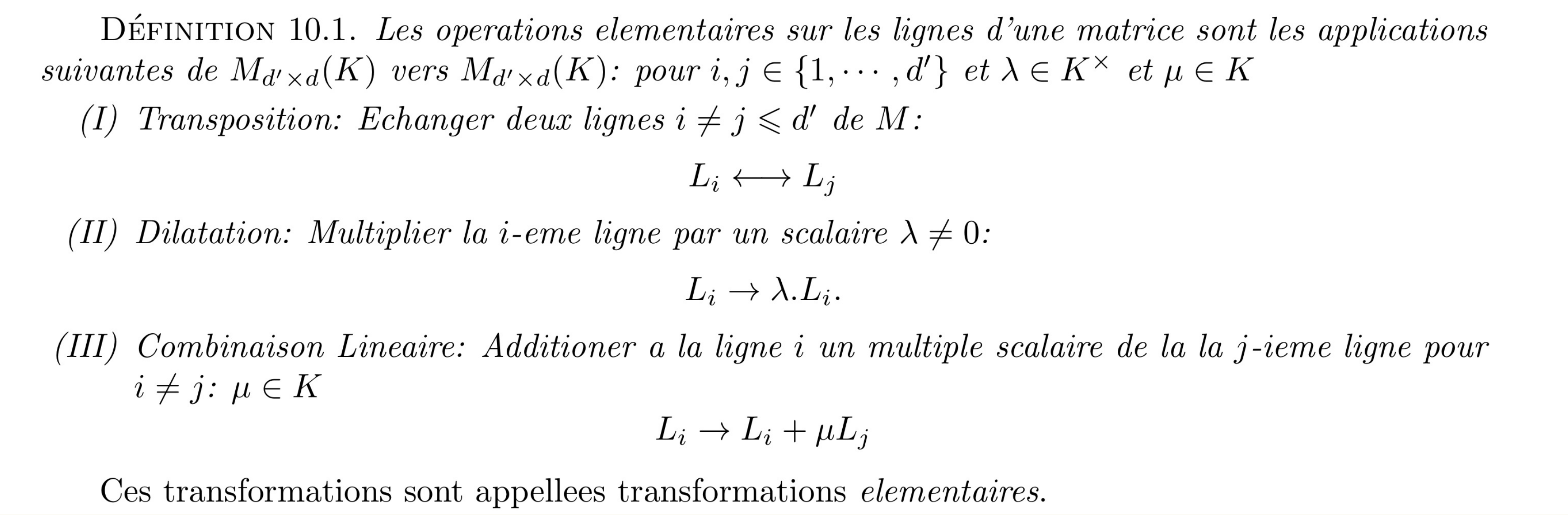
The first matrix I designed was quite naturally perfect.

It was a work of art. Flawless. Sublime.

A triumph only equaled by its monumental failure.

Operations elementaires
sur les matrices

Operation sur les lignes



Définition 10.1. *Les operations elementaires sur les lignes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d'\times d}(K)$ vers $M_{d'\times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \cdots, d'\}$ et $\lambda \in K^{\times}$ et $\mu \in K$*

(I) *Transposition: Echanger deux lignes $i \neq j \leqslant d'$ de M:*

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

(II) *Dilatation: Multiplier la i-eme ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$:*

$$L_i \to \lambda . L_i .$$

(III) *Combinaison Lineaire: Additioner a la ligne i un multiple scalaire de la la j-ieme ligne pour $i \neq j$: $\mu \in K$*

$$L_i \to L_i + \mu L_j$$

Ces transformations sont appellees transformations *elementaires*.

$$L_i \to L_i + \mu L_j \longrightarrow (L_i + \mu L_j) - \mu L_j = L_i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Car}\,K \neq 2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

Proposition 10.1. *Ces trois operations sont des applications lineaires bijectives*

$$(I),(II),(III):\ M_{d'\times d}(K)\mapsto M_{d'\times d}(K).$$

Preuve : On va voir que les operation (I) (II) et (III) sont donnes par des multiplication a gauche par des matrices de $M_{d'}(K)$

$$T.\bullet : M \in M_{d'\times d}(K) \longrightarrow T.M \in M_{d'\times d}(K)$$

$$T\in M_{d'}(K)$$

avec T une matrice inversible :

l'inverse de $T \cdot \bullet$ et $T^{-1} \cdot \bullet$

$\square$

Rmq : (I) & (III) s'etendent au cas $i=j$

- la transposition $L_i \leftrightarrow L_i$ c'est l'identite

- CL : $i=j$ $L_i \to L_i + \mu L_i$

$$= (1+\mu) L_i$$

(on demande que $\mu \neq -1$)

Proposition 10.2. *Les trois operations elementaires sont obtenues par multiplication a gauche de M par des matrices convenables: pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant d'$*

(I) $T_{ij}.\bullet : M \mapsto T_{ij}.M$
(II) $D_{i,\lambda}.\bullet : M \mapsto D_{i,\lambda}.M$
(III) $Cl_{ij,\mu}.\bullet : M \mapsto Cl_{ij,\mu}.M$.

ou les matrices carrees $T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} \in M_{d'}(K)$ sont definies par:

$$T_{ij} = \mathrm{Id}_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

$$D_{i,\lambda} = \mathrm{Id}_{d'} + (\lambda - 1).E_{ii},\ \ \lambda \neq 0$$

$$Cl_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_{d'} + \mu.E_{ij},\ \ i \neq j \text{ ou } \mu \neq -1 \text{ si } i = j.$$

Définition 10.2. *Les matrices*

$$T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ \lambda \neq 0,\ Cl_{ij,\mu}$$

pour $i, j \leqslant d'$, $\lambda \neq 0$, et si $i = j$, $\mu \neq -1$ sont appellees matrices de transformations elementaires.

Preuve: $E_{ij} \in M_{d'}(K) \quad (i,j \leq d')$

$$M = (m_{kl})_{\substack{k \leq d' \\ l \leq d}} \quad e_{ij,kv} = \delta_{k=i} \cdot \delta_{v=j}$$

$$(E_{ij} \cdot M)_{kl} = \sum_{v \leq d'} e_{ij,kv} \cdot m_{vl}$$

$$= \delta_{k=i} \cdot m_{jl} \quad l \leq d$$

$(E_{i,j} \cdot M)$ est la matrice de taille $d' \times d$ dont toutes les lignes sauf la i-ieme sont nulle et la i-eme ligne est donnée par la j-ieme lingue L_j de M

Exemple : $(Id_{d'} + \mu E_{ij}) \cdot M$

$= M + \mu E_{ij} \cdot M$

est la matrice ou on a ajoute a la i-eme ligne $\mu \times$ la jieme ligne

$Id_d + \mu E_{ij}$: $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$

la matrice $Id_{d'} - E_{ii} - E_{jj}$

remplace M par la matrice ou les lignes

L_i et L_j sont mises a 0

et $Id_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

permet d'echanger L_i et L_j

Définition 10.3. *On dit que N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite de transformations elementaires qui transforme M en N.*

– De maniere equivalente, N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite finie de matrices des transformations elementaires telle que N est obtenue a partir de M par multiplications a gauche par cette suite de matrices.

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est ligne-equivalunte

a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Rmq: Si N est ligne equivalente a M alors N est equivalente a M

$$N = \overbrace{T_d \cdots T_2 T_1}^{A \text{ et inversible}} M . \overset{Id_d}{\overset{\shortparallel}{B}}$$

$\uparrow$ (T_2) matrice de transf elementai donc inversible

$$N = \underset{\substack{\uparrow \\ T}}{A} M . \underset{\substack{\nwarrow \\ Id_d}}{B}$$

PROPOSITION 10.3. *La relation etre "ligne-equivalente" est une relation d'equivalence sur $M_{d' \times d}(K)$.*

– De plus deux matrices M, N ligne-equivalentes sont equivalentes au sens de la notion d'equivalence de deux matrices de la Definition 8.10.

Preuve: si $N = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot M$

$$\Rightarrow M = T_1^{-1} \cdot \ldots \cdot T_{n-1}^{-1} \cdot T_n^{-1} N$$

⇝ symetrique

— $M = T \cdot T^{-1} M$ reflexif

transitif: $N = T_n \circ \cdots \circ T_1 \circ M$

$$P = T'_m \circ T'_{m-1} \circ \cdots \circ T'_1 \circ N$$

$$P = T'_m \circ \cdots \circ T'_1 \circ T_n \circ \cdots \circ T_1 \circ M$$

Π