EPFL Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 10

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

Changements de bases

Exercice 1. On considere la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application lineaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. Que vaut $\varphi(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4$?
2. Trouver une base du noyau et de l'image de φ.
3. Trouver deux matrices A et B telles que $A.M.B = I_{3\times 4}(r)$ avec $r = \mathrm{rg}(\varphi)$.

Exercice 2 (De l'interet de changer de base)**.** Soit K un corps de caracteristique $\neq 3$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x/3 + 4y/3, -x/3 + 5y/3) \end{array}.$$

Soit $\mathscr{B} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{(2, 1), (1, 2)\}$

1. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de K^2 et calculer la matrice N de φ dans cette base de deux manieres :
   - Par la formule de changement de base pour les matrices.
   - Directement en exprimant $\varphi(\mathbf{f}_i)$ $i = 1, 2$ en combinaison lineaire de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

— Montrer que si on avait $\mathrm{car}(K) = 3$ alors $\mathscr{B}$ ne serait pas une base.

3. Calculer par recurrence N^n pour tout entier $n \geqslant 0$ (on pose $N^0 = \mathrm{Id}_2$).
4. Montrer par recurrence que si $C \in \mathrm{GL}_2(K)$ et $U \in M_2(K)$ alors pour tout $n \geqslant 0$
$$(C.U.C^{-1})^n = C.U^n.C^{-1}.$$
5. En deduire une expression (relativement) elementaire de la puissance M^n pour tout $n \geqslant 0$.

Produits de matrices

Exercice 3. Soit $M = (m_{ij}) \in M_{d'' \times d'}(K)$ et $N = (n_{kl}) \in M_{d' \times d}(K)$. Montrer par un calcul litteral que
$$^t(M.N) = {}^tN\,{}^tM.$$

Exercice 4. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \leqslant 2} \in M_2(K)$ une matrice et $[A.]$, l'application de multiplication a gauche par A :
$$[A.] : M \in M_2(K) \mapsto A.M \in M_2(K).$$

1. Montrer que $[A.]$ est lineaire.
2. Montrer que $[A.]$ est inversible ssi A est inversible.
3. Calculer la matrice de $[A.]$ dans la base canonique de $M_2(K)$ (formee des matrices elementaires dans l'ordre ci-dessous)
$$\mathscr{B}_{22}^0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}.$$
4. Montrer que
$$A^2 = \mathbf{0}_2 \text{ ssi } \mathrm{Im}([A.]) \subset \ker([A.])$$
(pour une direction remarquer que $A \in \mathrm{Im}([A.])$).
5. On considere l'application
$$A \in M_2(K) \mapsto [A.] \in \mathrm{End}(M_2(K)).$$
Montrer qu'elle est lineaire et injective.

Exercice 5. (Matrice compagnon) On va generaliser un peu l'exercice 11 de la serie precedente.

Soit $\mathbf{b} = (b_0, \cdots, b_3) \in K^4$ et la matrice 4×4
$$M_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -b_3 \end{pmatrix} \in M_4(K).$$

1. Soit $\varphi : K^4 \mapsto K^4$ l'application lineaire dont la matrice est $M_{\mathbf{b}}$ dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_4\}$. Montrer que $\{\mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_1), \varphi^2(\mathbf{e}_1), \varphi^3(\mathbf{e}_1)\}$ est une base de K^4. Que vaut $\varphi^4(\mathbf{e}_1)$ dans cette base ?
2. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$ tels que
$$\underline{0}_4 = \varphi^4 + a_3\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_1.\varphi + a_0.\mathrm{Id}_{K^4}.$$
(tester cette egalite sur les elements d'une base bien choisie).
3. Montrer que
$$\mathbf{0}_4 = M_{\mathbf{b}}^4 + a_3 M_{\mathbf{b}}^3 + a_2 M_{\mathbf{b}}^2 + a_1.M_{\mathbf{b}} + a_0.\mathrm{Id}_d.$$

Exercice 6. ($\star$) Soit $M = (m_{ij})_{ij\leqslant d}$, une matrice carree. On defini la *trace* de M par
$$\mathrm{tr}(M) := \sum_{i=1}^{d} m_{ii} = m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{dd}.$$
(la somme des coefficients diagonaux de M).

1. Montrer que la trace $\mathrm{tr} : M_d(K) \mapsto K$ definit une forme lineaire sur $M_d(K)$.
2. Montrer que pour $M, N \in M_d(K)$
$$\mathrm{tr}({}^tM) = \mathrm{tr}(M),\ \mathrm{tr}({}^tM.N) = \sum_{i,j=1,\cdots,d}\sum m_{ij}n_{ij}.$$
En particulier $\mathrm{tr}({}^tM.M) = \sum_{i,j=1,\cdots,d}\sum m_{ij}^2$.
3. Montrer que pour $M, N \in M_d(K)$
$$\mathrm{tr}(M.N) = \mathrm{tr}(N.M).$$
4. Montrer que si $C \in \mathrm{GL}_d(K)$ est inversible
$$\mathrm{tr}(\mathrm{Ad}(C)(M)) = \mathrm{tr}(C.M.C^{-1}) = \mathrm{tr}(M).$$
5. Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \ \textit{et}\ N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que M et N sont equivalentes mais pas semblables.
6. Calculer le trace de la matrice associee a la multiplication par la matrice A
$$[A.] : M_2(K) \mapsto M_2(K)$$
dans l'exercice 4.

Exercice 7. On reprend l'exercice 10 de la feuille precedente en dimension arbitraire : soit K un corps et pour $d \geqslant 2$

$$\mathscr{B}^0_{dd} := \{E_{ij},\ i, j \leqslant d\} \subset M_d(K)$$

l'ensemble des matrices elementaires (on rappelle que c'est une base de $M_d(K)$: on l'appelle la base canonique de $M_d(K)$).

On defini les SEVs suivants de $M_d(K)$:

$$D_d(K) = \mathrm{Vect}(E_{ii},\ i = 1, \cdots, d) \ \textit{et}\ T_d(K) = \mathrm{Vect}(E_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d).$$

1. Quelles sont les dimensions de ces SEVs et comment appelle-t-on ces ensembles de matrices ?
2. Montrer que ces SEVs sont en fait des sous-algebres de $M_d(K)$ (remarquer que le produit de deux matrices elementaires de ces espaces est encore dans ces espaces).
3. Lesquelles de ces sous-algebres sont commutatives ?

1 Transformations elementaires

Exercice 8. Soient

$$T_{ij}, D_{i,\lambda}\ (\lambda \neq 0),\ Cl_{ij,\mu},\ i, j \leqslant d'$$

des matrices $d' \times d'$ des transformations elementaires.

1. En utilisant les expressions de ces matrices en terme de l'identite et des matrices elementaires E_{ij} (cf. le poly du cours), verifier que

$$T_{ij}^{-1} = T_{ij},\ D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,1/\lambda},\ Cl_{ij,\mu}^{-1} = Cl_{ij,-\mu}.$$

Exercice 9. Soit K un corps. On considere la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(K)$$

1. Donner une succession de transformations elementaires qui transforme M en la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \mathrm{car}(K) = 2,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } \mathrm{car}(K) \neq 2$$