Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Serie 8-9, Corrige

Tous les exercices seront corriges. Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie. Soit K un corps; dans la suite si n est un entier on ecrira "n" pour $n_K = n.1_K$. De meme si n n'est pas divisible par car(K) (de sorte que n_K est inversible), on ecrira n^{-1} ou $1/n$ pour l'inverse multiplicatif de n_K: par exemple si car$K \neq 3$, on ecrira $2/3 = 2.3^{-1}$ pour $2_K.3_K^{-1}$.

Coefficients des applications lineaires

Soit $d \geqslant 1$, l'espace vectoriel produit K^d est muni d'une base dite base canonique qu'on notera

$$\mathscr{B}_d^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, \cdots, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_d^0 = (0, 0, \cdots, 1)\}.$$

Par exemple pour $d = 3$

$$\mathscr{B}_3^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3^0 = (0, 0, 1)\}.$$

Exercice 1. Soit $V = K^2$ et

$$\mathscr{B}^0 = \mathscr{B}_2^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1)\}$$

la base canonique.

1. Determiner pour quelles valeurs de car(K) la famille

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 2),\ \mathbf{e}_2 = (3, 1)\}$$

est une base de V. On suppose pour toute la suite que la caracteristique de K est telle que $\mathscr{B}$ est bien une base (on pourra meme supposer que car$(K) = 0$ si on prefere). **Corrigé:** *dim* $V = 2 = |\mathscr{B}|$, donc $\mathscr{B}$ est une base si et seulement si la famille est

libre. Si *car* $K = 5$, alors $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 = 2(1, 2) + (3, 1) = (5, 5) = 0$, donc $\mathscr{B}$ n'est pas libre et donc ce n'est pas une base. Sinon, $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 = (0, 0)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\implies$
$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ 2(-3\lambda_2) + \lambda_2 = 0 \end{cases}$
$\implies \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ -5\lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$

2. Exprimer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ comme CL de $\mathbf{e}_1^0$ et de $\mathbf{e}_2^0$. Exprimer $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0$ comme CL de $\mathbf{e}_1$ et de $\mathbf{e}_2$. **Corrigé:** $\mathbf{e}_1 = 1\mathbf{e}_1^0 + 2\mathbf{e}_2^0$ et $\mathbf{e}_2 = 3\mathbf{e}_1^0 + 1\mathbf{e}_2^0$. On en deduit que $\begin{cases} \mathbf{e}_1^0 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2^0 \\ \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1^0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \mathbf{e}_1^0 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_1^0 \\ \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2^0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} \mathbf{e}_1^0 = \frac{-1}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^0 = \frac{3}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{e}_2 \end{cases}$

3. On considere l'espace vectoriel des applications lineaires de V vers V

$$\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V).$$

Suivant qu'on choisit $\mathscr{B}^0$ ou $\mathscr{B}$ comme bases de V vu comme espace de depart ou comme d'arrivee, on obtient quatres bases possibles pour $\mathrm{Hom}_K(V, V)$:

$$\mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}.$$

4. Soit

$$\varphi = \mathrm{Id}_V : v \mapsto v$$

l'application identite de V. Calculer les coefficient $(m_{ij}(\varphi))_{i,j\leqslant 2}$ de φ relativement aux 4 bases ci-dessus. (les deux premiers cas ne demandent que tres peu de calculs et les autres pas trop de calculs une fois qu'on a fait la question 2). **Corrigé:** • $\mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}$:

$m_{1,1} = (\mathbf{e}_1^0)^*(\mathbf{e}_1^0) = 1$, $m_{1,2} = (\mathbf{e}_1^0)^*(\mathbf{e}_2^0) = 0$
$m_{2,1} = (\mathbf{e}_2^0)^*(\mathbf{e}_1^0) = 0$, $m_{2,2} = (\mathbf{e}_2^0)^*(\mathbf{e}_2^0) = 1$ • $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$: $m_{1,1} = \mathbf{e}_1^*(\mathbf{e}_1) = 1$, $m_{1,2} = \mathbf{e}_1^*(\mathbf{e}_2) = 0$
$m_{2,1} = \mathbf{e}_2^*(\mathbf{e}_1) = 0$, $m_{2,2} = \mathbf{e}_2^*(\mathbf{e}_2) = 1$ • $\mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}}$:
$m_{1,1} = (\mathbf{e}_1^0)^*(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1^0)^*(\mathbf{e}_1^0 + 2\mathbf{e}_2^0) = (\mathbf{e}_1^0)^*(\mathbf{e}_1^0) + 2(\mathbf{e}_1^0)^*(\mathbf{e}_2^0) = 1$, $m_{1,2} = (\mathbf{e}_1^0)^*(\mathbf{e}_2) = 3$
$m_{2,1} = (\mathbf{e}_2^0)^*(\mathbf{e}_1) = 2$, $m_{2,2} = (\mathbf{e}_2^0)^*(\mathbf{e}_2) = 1$ • $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}$:
$m_{1,1} = \mathbf{e}_1^*(\mathbf{e}_1^0) = \mathbf{e}_1^*(\frac{-1}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{-1}{5}\ bfe_1^*(\mathbf{e}_1) + \frac{2}{5}\mathbf{e}_1^*(\mathbf{e}_2) = \frac{-1}{5}$, $m_{1,2} = \mathbf{e}_1^*(\mathbf{e}_2^0) = \frac{3}{5}$
$m_{2,1} = \mathbf{e}_2^*(\mathbf{e}_1^0) = \frac{2}{5}$, $m_{2,2} = \mathbf{e}_2^*(\mathbf{e}_2^0) = \frac{-1}{5}$

5. Soit $\psi : V \mapsto V$ l'unique application lineaire telle que

$$\psi(1, 2) = (2, 4),\ \psi(3, 1) = (-3, -1).$$

Calculer $\psi(1, 0)$ et $\psi(0, 1)$ comme CL des elements de $\mathscr{B}^0$ et comme CL des elements de $\mathscr{B}$. **Corrigé:** Observons que $\psi(\mathbf{e}_1) = \psi(1, 2) = (2, 4) = 2\mathbf{e}_1$ et $\psi(\mathbf{e}_2) = \psi(3, 1) =$

$(-3, -1) = -\mathbf{e}_1$. • $\psi(1, 0) = \psi(\mathbf{e}_1^0) = \psi(\frac{-1}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{-1}{5}\psi(\mathbf{e}_1) + \frac{2}{5}\psi\mathbf{e}_2 = \frac{-1}{5}.2\mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}(-1)\mathbf{e}_2 = \frac{-2}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{-2}{5}\mathbf{e}_2$ • $\psi(1, 0) = \frac{-2}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{-2}{5}\mathbf{e}_2 = (\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}) + (\frac{-6}{5}, \frac{-2}{5}) = (\frac{-8}{5}, \frac{-6}{5}) = \frac{-8}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{-6}{5}\mathbf{e}_2^0$ • $\psi(0, 1) = \psi(\frac{3}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{e}_2) = 2\frac{3}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{e}_2 = \frac{6}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{e}_2$ • $\psi(0, 1) = \frac{6}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{e}_2 = (\frac{6}{5}, \frac{12}{5}) + (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}) = (\frac{9}{5}, \frac{13}{5}) = \frac{9}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{13}{5}\mathbf{e}_2^0$

6. Calculer les coefficients de ψ relativement aux bases
$$\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}, \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}.$$
Corrigé: • $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$: $m_{1,1} = \mathbf{e}_1^*(\psi(\mathbf{e}_1)) = \mathbf{e}_1^*(2\mathbf{e}_1) = 2$, $m_{1,2} = \mathbf{e}_1^*(\psi(\mathbf{e}_2)) = \mathbf{e}_1^*(-\mathbf{e}_2) = 0$

$m_{2,1} = \mathbf{e}_2^*(\psi(\mathbf{e}_1)) = \mathbf{e}_2^*(2\mathbf{e}_1)0$, $m_{2,2} = \mathbf{e}_2^*(\psi(\mathbf{e}_2)) = \mathbf{e}_2^*(-\mathbf{e}_2) = -1$ • $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}$:
$m_{1,1} = \mathbf{e}_1^*(\psi(\mathbf{e}_1^0)) = \mathbf{e}_1^*(\frac{-2}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{-2}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{-2}{5}$, $m_{1,2} = \mathbf{e}_1^*(\psi(\mathbf{e}_2^0)) = \mathbf{e}_1^*(\frac{6}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{6}{5}$
$m_{2,1} = \mathbf{e}_2^*(\psi(\mathbf{e}_1^0)) = \mathbf{e}_2^*(\frac{-2}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{-2}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{-2}{5}$, $m_{2,2} = \mathbf{e}_2^*(\psi(\mathbf{e}_2^0)) = \mathbf{e}_2^*(\frac{6}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{1}{5}$ • $\mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}$: $m_{1,1} = (\mathbf{e}_1^0)^*(\psi(\mathbf{e}_1^0)) = (\mathbf{e}_1^0)^*(\frac{-8}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{-6}{5}\mathbf{e}_2^0) = \frac{-8}{5}$
$m_{1,2} = (\mathbf{e}_1^0)^*(\psi(\mathbf{e}_2^0)) = (\mathbf{e}_1^0)^*(\frac{9}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{13}{5}\mathbf{e}_2^0) = \frac{9}{5}$
$m_{2,1} = (\mathbf{e}_2^0)^*(\psi(\mathbf{e}_1^0)) = (\mathbf{e}_2^0)^*(\frac{-8}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{-6}{5}\mathbf{e}_2^0) = \frac{-6}{5}$
$m_{2,2} = (\mathbf{e}_2^0)^*(\psi(\mathbf{e}_2^0)) = (\mathbf{e}_2^0)^*(\frac{9}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{13}{5}\mathbf{e}_2^0) = \frac{13}{5}$

7. Calculer $\psi(x,y)$ pour tout $(x,y) \in K^2$ (par exemple en utilisant la formule pour l'image d'un vecteur en fonctions des coefficients de l'application lineaire relativement a des bases convenables). **Corrigé:**

$\psi(x,y) = \psi(x\mathbf{e}_1^0 + y\mathbf{e}_2^0) = x\psi(\mathbf{e}_1^0) + y\psi(\mathbf{e}_2^0) = x(\frac{-8}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{-6}{5}\mathbf{e}_2^0) + y(\frac{9}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{13}{5}\mathbf{e}_2^0) = \frac{-8x+9y}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{-6x+13y}{5}\mathbf{e}_2^0 = (\frac{-8x+9y}{5}, \frac{-6x+13y}{5})$

8. Calculer les coefficients de $\psi^2 = \psi \circ \psi$ relativement aux bases
$$\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}, \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}.$$
Corrige: • $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$: $\psi^2(\mathbf{e}_1) = \psi(\psi(\mathbf{e}_1)) = \psi(2\mathbf{e}_1) = 2\psi(\mathbf{e}_1) = 4\mathbf{e}_1$ et $\psi^2(\mathbf{e}_2) =$

$-\psi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$
Donc $m_{1,1} = 4$, $m_{1,2} = 0$, $m_{2,1} = 0$ et $m_{2,2} = 1$. • $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}$: $\psi^2(\mathbf{e}_1^0) = \psi(\psi(\mathbf{e}_1^0)) = \psi(\frac{-2}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{-2}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{-2}{5}\mathfrak{p}si(\mathbf{e}_1) + \frac{-2}{5}\psi(\mathbf{e}_2) = \frac{-2}{5}.2\mathbf{e}_1 + \frac{-2}{5}(-1)\mathbf{e}_2 = \frac{-4}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_2$ et $\psi^2(\mathbf{e}_2^0) = \psi(\frac{6}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{e}_2) = \frac{12}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{e}_2$
Donc $m_{1,1} = \frac{-4}{5}$, $m_{1,2} = \frac{12}{5}$, $m_{2,1} = \frac{2}{5}$ et $m_{2,2} = \frac{-1}{5}$. • $\mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}$: $\psi^2(\mathbf{e}_1^0) = \frac{-4}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_2 = (\frac{-4}{5}, \frac{-8}{5}) + (\frac{6}{5}, \frac{2}{5}) = (\frac{2}{5}, \frac{-6}{5}) = \frac{2}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{-6}{5}\mathbf{e}_2^0$ et $\psi^2(\mathbf{e}_2^0) = \frac{12}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{e}_2 = (\frac{12}{5}, \frac{24}{5}) + (\frac{-3}{5},\ frac{-15}) = \frac{9}{5}\mathbf{e}_1^0 + \frac{23}{5}\mathbf{e}_2^0$
Donc $m_{1,1} = \frac{2}{5}$, $m_{1,2} = \frac{9}{5}$, $m_{2,1} = \frac{-6}{5}$ et $m_{2,2} = \frac{23}{5}$.

Exercice 2. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^3$ definie par
$$\varphi(x,y) = (-x + 3y, 2x - y, x + y).$$

1. Donner une famille generatrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ puis donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. **Corrige:**

ψ étant surjective sur $Im(\varphi)$, l'image d'un famille génératrice (et en particulier une base) de K^2 est une famille génératrice de $Im(\varphi)$. $\varphi(1,0) = (-1,2,1)$ et $\varphi(0,1) = (3,-1,1)$, donc $\{(-1,2,1),(3,-1,1)\}$ est une famille génératrice de $Im(\varphi)$ Si cette famille et libre, il s'agit d'une base. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, alors $\lambda_1(-1,2,1)+\lambda_2(3,-1,1) = (0,0,0) \implies \begin{cases} 3\lambda_2 = \lambda_1 \\ 2\lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 3\lambda_2 = \lambda_1 \\ 6\lambda_2 = \lambda_2 \\ 3\lambda_2 = -\lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 3\lambda_2 = \lambda_1 \\ 5\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, car *car* K ne peut pas valoir la fois 5 et 2. Donc $\{(-1,2,1),(3,-1,1)\}$ est une base de $Im(\varphi)$.

2. Donner une representation cartesienne de Im(φ) avec une nombre minimal d'equations.

   Corrigé: $(x,y,z) \in Im(\varphi) \iff \begin{cases} x = -a+3b \\ y = 2a-b \\ z = a+b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3b-x \\ y = 2(3b-x)-b \\ z = 3b-x+b \end{cases} \iff$

   $\begin{cases} a = 3b-x \\ y = 5b-2x \\ z = 4b-x \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3b-x \\ b = \frac{y}{5}+\frac{2}{5}x \\ z = \frac{4}{5}y+\frac{8}{5}x-x = \frac{4}{5}y+\frac{3}{5}x \end{cases}$ Donc $Im(\phi) = \{(x,y,z) \ : \ z-\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}x = 0\}$ si *car* $K \neq 5$. Si *car* $K = 5$, on a $\begin{cases} a = 3b-x \\ y = 5b-2x \\ z = 4b-x \end{cases} \iff$

   $\begin{cases} a = 3b-x \\ y = -2x \\ z = 4b-x \end{cases} \iff$ Ce qui donne $Im(\varphi) = \{(x,y,z) \ : \ y = -2x\}$.

3. Donner une representation cartesienne de ker(φ) avec une nombre minimal d'equations. Trouver une base de ker(φ). **Corrige:** $Im(\varphi)$ a une base de cxardinal 2, donc

   sa dimension est 2, et d'après le théorème noyau image, $dim(ker(\varphi)) = 0$, donc $ker(\varphi) = \{0_{K^2}\}$. Une base de $ker(\varphi)$ est $\{0_{K^2}\}$ et une représentation cartésienne est $ker(\varphi) = \{(x,y) \ : \ x = 0, y = 0\}$.

4. Determiner les coefficient de φ relativement a $\mathcal{B}_{\mathscr{B}_2^0,\mathscr{B}_3^0}$. **Corrigé:** En reprenant les

   résultat de $\varphi(1,0)$ et $\varphi(0,1)$ calculés au point 1, on a $m_{1,1} = -1$, $m_{1,2} = 3$, $m_{2,1} = 2$, $m_{2,2} = -1$, $m_{3,1} = 1$ et $m_{3,2} = 1$.

5. Calculer directement $\varphi(3,3)$. Retrouver ce resultat a l'aide de la formule calculant l'image d'un vecteur par une application lineaire en fonction des coefficients de celle-ci. **Corrigé:** $\varphi(3,3) = (-3+3.3, 2.3-3, 3+3) = (6,3,6)$. Alternative-

   ment, $\varphi(3,3) = (3m_{1,1}+3m_{1,2}, 3m_{2,1}+3m_{2,2}, 3m_{3,1}+3m_{3,2}) = (6,3,6)$ $\mathscr{B}$ la base de

   l'exercice precedent.

Un peu d'algebre lineaire abstraite

Exercice 3. Soit V un K-EV de dimension finie, X, Y des sous-espaces de dimension $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$ et $\mathscr{B}_X = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_x\}$, $\mathscr{B}_Y = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_y\}$ des bases de X et Y.

1. Montrer que si $V = X \oplus Y$ alors on a $\mathscr{B}_X \cap \mathscr{B}_Y = \emptyset$ et

$$\mathscr{B}_X \cup \mathscr{B}_Y = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_x, \mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_y\}$$

est une base de V. $V = X \oplus Y \implies X \cap Y = \{0_V\}$. Mais X et Y étant de dimensions

au moins 1, $\{0_V\}$ n'est ni dans la base de X ni dans la base de Y. On en déduit que $\mathscr{B}_X \cap \mathscr{B}_Y = \emptyset$. Tout élément v de V s'écrit de manière unique comme somme $v = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in X$ et $\mathbf{y} \in Y$. Or $\mathbf{x}$ s'éctit de manière unique comme CL d'éléments de $\mathscr{B}_X$ et $\mathbf{y}$ s'écrit de manière unique comme CL d'éléments de $\mathscr{B}_Y$, donc v s'écrit de manière unique comme CL d'éléments de $\mathscr{B}_X \cup \mathscr{B}_Y$, donc $\mathscr{B}_X \cup \mathscr{B}_Y$ est une base de V.

Exercice 4. (*) Soit V un K-EV de dimension d. Un endomorphisme $\pi : V \mapsto V$ est appele projecteur si π verifie (dans $\mathrm{End}(V)$)

$$\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi.$$

1. Montrer que si π est un projecteur $\ker \pi \cap \mathrm{Im}\, \pi = \{0_V\}$. **Corrigé:** Si $0_V \neq v \in Im\ \pi$

   alors $\exists w \in V$ tel que $\pi(w) = v$, mais alors $\pi(v) = \pi^2(w) = \pi(w) = v \neq 0_V$, donc pour tout $v \neq 0_V$, $v \in Im\ \pi \implies v \notin ker\ \pi$. $0_V \in ker\ \pi$ et $0_V \in Im\ \pi$ (car ce sont des SEV). Donc $ker\ \pi \cap Im\ \pi = \{0_V\}$.

2. Montrer (sans calcul mais en utilisant un exercice de la serie precedente) que $V = \ker \pi \oplus \mathrm{Im}\, \pi$. **Corrigé:** D'après le théorème noyau image, $dim(ker\ \pi) + dim(Im\ \pi) =$

   $dim(V)$. De plus, $ker\ \pi \cap Im\ \pi = \{0_V\}$. D'après l'exercice 6 de la série 7 cela est équivalent $V = \ker \pi \oplus \mathrm{Im}\, \pi$.

3. Soit $v \in V$. Que vaut $\pi(v - \pi(v))$? En deduire une decomposition explicite d'un vecteur $v \in V$ sous la forme

$$v = v_0 + v_1 \text{ avec } v_0 \in \ker\ \pi,\ v_1 \in \mathrm{Im}\ \pi.$$

   Corrigé: $\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi^2(v) = \pi(v) - \pi(v) = 0_V$. $v = (v - \pi(v)) + \pi(v)$,

   $\pi(v - \pi(v)) = 0_V \implies (v - \pi(v)) \in ker\pi$ et $\pi(v) \in Im\pi$

4. Soit $\mathscr{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{d_0}\} \subset \ker\pi$ et $\mathscr{B}_1 = \{\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_{d_1}\} \subset \operatorname{Im}\pi$ des bases du noyau et de l'image. Montrer que
$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_0 \cup \mathscr{B}_1$$
est une base de V et en particulier $d = d_0 + d_1$. Calculer les coefficients $(m_{ij})_{\substack{i\leqslant d\\ j\leqslant d}}$ de π dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$. **Corrigé:** $V = \ker\pi \oplus \operatorname{Im}\pi \implies$ tout $v \in V$ s'écrit de

manière unique comme $v_0 + v_1, v_0 \in ker\pi, v_1 \in Im\pi$, or v_0 s'écrit de manière unique comme CL des éléments de $\mathscr{B}_0$ et v_1 s'écrit de manière unique comme CL d'éléments de $\mathscr{B}_1$, donc v s'écrit de manière unique comme CL d'éléments de $\mathscr{B}_0 \cup \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_0 \cup \mathscr{B}_1$ est une base. On a donc $d = d_0 + d_1$. Notons alors $\mathscr{B} = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_d\}$ avec $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i \; \forall 1 \leqslant i \leqslant d_0$ et $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}'_{i-d_0} \; \forall d_0 \leqslant i \leqslant d$. $\forall \mathbf{f}_k, 1 \leqslant k \leqslant d_0, \pi(\mathbf{f}_k) = \pi(\mathbf{e}_k) = 0_V$ donc $m_{i,k} = 0 \; \forall 1 \leqslant k \leqslant d_0$. $\forall \mathbf{f}_k, d_0 \leqslant k \leqslant d, \mathbf{f}_k = \pi(v_k) \implies \pi(\mathbf{f}_k) = \pi^2(v_k) = \pi(v_k) = \mathbf{f}_k$, donc $m_{i,k} = \delta_{i=k}, \forall d_0 \leqslant k \leqslant d$.

Dualite

Exercice 5 (bi-dual)**.** Soit V un K-EV de dimension finie d, $V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$ son dual et
$$V^{**} = (V^*)^* = \operatorname{Hom}_K(V^*, K)$$
le bi-dual de V (le dual du dual V^* de V).

1. Montrer (sans calculs) que V et V^{**} sont isomorphes. On va donner une isomorphisme explicite et canonique. **Corrigé:** Soit $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V. On utilise

   l'isomorphisme $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^{**}$, $\forall \mathbf{e}_i \in \mathscr{B}$.

2. Pour $v \in V$, on considere l'application "evaluation au point v" qui a une forme lineaire $\ell : V \mapsto K$ associe sa valeur au vecteur v:
$$\operatorname{eval}_v : \ell \mapsto \operatorname{eval}_v(\ell) := \ell(v) \in K.$$
   Montrer que eval_v est lineaire (sur V^*) et definit donc un element de V^{**}. **Corrigé:**

   $\forall l, l' \in V^*, \lambda \in K$, $eval_v(l + \lambda l') = (l + \lambda l')(v) = l(v) + \lambda l'(v) = eval_v(l) + \lambda eval_v(l')$, donc $eval_v$ est bien linéaire, et donc un élément de V^{**}.

3. On considere alors l'application:
$$\operatorname{eval}_\bullet : \begin{matrix} V & \mapsto & V^{**} \\ v & \mapsto & \operatorname{eval}_v \end{matrix}.$$
   Montrer que $\operatorname{eval}_\bullet$ est lineaire et injective. En deduire que c'est un isomorphisme de V vers V^{**}. **Corrigé:** $\forall v, v' \in V, \lambda \in K, l \in V^*$, $eval_\bullet(v + \lambda v') : l \mapsto l(v +$

$\lambda v') = l(v) + \lambda l(v')$ et $eval_\bullet(v) + \lambda eval_\bullet(v') : l \mapsto l(v) + \lambda l(v')$, on en déduit que $eval_\bullet(v + \lambda v') = eval_\bullet(v) + \lambda eval_\bullet(v')$ donc $eval_\bullet$ est linéaire. $eval_v = 0_{V^{**}} \iff l(v) = 0_V \forall l \in V^* \iff v = 0_V$ donc $ker(eval_\bullet) = \{0_V\}$, donc $eval_\bullet$ est injective. $eval_\bullet$ est linéaire et injective entre duex espaces de mme dimension, on en déquit que c'est un isomorphisme de V vers V^{**}.

4. Soit $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ une base de V, $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_i^*,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ la base duale et
$$\mathscr{B}^{**} = \{\mathbf{e}_i^{**},\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$$
de la base duale de $\mathscr{B}^*$ (la bi-duale): c'est a dire l'unique famille de forme lineaires sur V^* verifiant
$$\mathbf{e}_i^{**}(\mathbf{e}_j^*) = \delta_{ij}.$$
Montrer que l'image de $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ par l'isomorphisme $\mathrm{eval}_\bullet$ est precisement la biduale $\mathscr{B}^{**}$. **Corrigé:** $eval_{\mathbf{e}_i} = \mathbf{e}_i^{**} : l \mapsto l(\mathbf{e}_i)$, donc $\mathbf{e}_i^{**}(\mathbf{e}_j^*) = \mathbf{e}_j^*(\mathbf{e}_i) = \delta_{i=j}$.

Remarque 0.1. On rappelle que le choix d'une base $\mathscr{B}$ de V definit deux isomorphismes
$$\mathrm{eval}_{\mathscr{B}} : V^* \simeq K^d,\ CL_{\mathscr{B}} : K^d \simeq V$$
et donc un isomorphisme "explicite"
$$CL_{\mathscr{B}} \circ \mathrm{eval}_{\mathscr{B}} : V^* \simeq V$$
entre le dual V^* et V. Il faut noter que cet isomorphisme depend du choix de la base $\mathscr{B}$. En revanche, l'isomorphisme reciproque
$$\mathrm{eval}_\bullet^{-1} : V^{**} \simeq V$$
ne depend pas du choix d'une base. On dit que le bidual de V est canoniquement isomorphe a V.

Exercice 6. Soit V, W deux EVs de dimensions finies. On rappelle que etant donne $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire, sa duale $\varphi^* : W^* \mapsto V^*$ est l'application qui a toute forme lineaire $\ell : W \mapsto K$ sur W associe la forme lineaire sur V
$$\varphi^*(\ell) = \ell \circ \varphi : v \mapsto \ell(\varphi(v)) \in K.$$

1. Montrer que l'application $\bullet^*$ qui a une application lineaire de V vers W associe l'application lineaire duale (de W^* vers V^*)
$$\bullet^* : \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$$
est elle meme lineaire :
$$\bullet^* \in \ \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Hom}(W^*, V^*)).$$

En d'autres termes pour $\lambda \in K$, $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on a

$$(\lambda\varphi + \varphi')^* = \lambda.\varphi^* + \varphi'^*$$

Corrigé: $\forall l \in W^*, v \in V$, $(\lambda\varphi + \varphi')^*(l)(v) = l \circ (\lambda\varphi + \varphi')(v) = l(\lambda\varphi(v) + \varphi'(v)) =$

$\lambda l(\varphi(v)) + l(\varphi'(v)) = (\lambda\varphi^*(l) + \varphi'^*(l))(v)$ Donc l'application $\bullet^*$ est bien linéaire.

2. Soit $\psi : W \mapsto Z$ une autre application lineaire vers un espace vectoriel Z. On a alors la composee $\psi \circ \varphi : V \mapsto Z$ et l'application duale $(\psi \circ \varphi)^* : Z^* \mapsto V^*$. Montrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Corrigé: $\forall l \in W^*, l' \in Z^*, v \in V$, $(\psi \circ \varphi)^*(l')(v) = l' \circ \psi \circ \varphi(v) = l' \circ \psi(\varphi(v)) =$

$\psi^*(l')(\varphi(v)) = \varphi^*(\psi^*(l'))(v) = \varphi^* \circ \psi^*(l')(v)$

3. On a vu que le bi-dual V^{**} est identifie a V via l'isomorphisme

$$\mathrm{eval}_\bullet : v \in V \mapsto \mathrm{eval}_v = (\ell \mapsto \ell(v)) \in V^{**}.$$

Montrer que sous cette identification la duale de la duale qu'une application φ est egale l'application elle-meme:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

Corrigé: $eval_\bullet(\varphi(v))(l) = eval_{\varphi(v)}(l) = l(\varphi(v))$ et $\varphi^{**}((eval_\bullet)(v))(l) = \varphi^{**}((eval_v))(l) =$

$eval_v \circ \varphi^*(l) = eval_v(l \circ \varphi) = l(\varphi(v))$.

Exercice 7. Determiner le rang des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M \cdot N$$

en fonction de la caracteristique du corps K.
Corrigé: Le rang de M vaut 2 en toute caractéristique. Le rang de N vaut 2 si la caractéristique est 2 et 3 dans les autres caractéristiques.

Le rang de $M \cdot N = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 14 & 12 \\ 11 & 17 & 19 & 13 \end{pmatrix}$ vaut 1 en caractéristique 2 et 2 dans les autres caractéristiques.

Exercice 8. Soient $\varphi : U \longrightarrow V$ et $\psi : V \longrightarrow W$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) \leqslant \mathrm{rg}(\psi)$.

2. Montrer que $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) \leqslant \mathrm{rg}(\varphi)$.

3. Montrer que si M et N sont des matrices de dimensions convenables, alors

$$\mathrm{rg}(M \cdot N) \leqslant \mathrm{rg}(M)\ ,\ \mathrm{rg}(M \cdot N) \leqslant \mathrm{rg}(N)$$

4. Montrer la deuxième inégalité en utilisant la première ainsi que des propriétés de la transposition.

. **Corrigé:**

1. Si $x \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$, alors il existe $u \in U$ tel que $x = \psi(\varphi(u)) \in \mathrm{Im}(\psi)$. Donc $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\psi)$, et donc $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) \leqslant \mathrm{rg}(\psi)$.

2. On a $\ker(\varphi) \subset \ker(\psi \circ \varphi)$. Donc, en utilisant le théorème du rang (pour φ et $\psi \circ \varphi$), on a $0 \leqslant \dim(\ker(\psi \circ \varphi)) - \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) - \dim(\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)) = \mathrm{rg}(\varphi) - \mathrm{rg}(\psi \circ \varphi)$.

3. Suit des deux premières parties en prenant $M = \mathrm{mat}(\psi)$ et $N = \mathrm{mat}(\varphi)$ et en se souvenant que $M \cdot N$ est la matrice de $\psi \circ \varphi$.

4. $\mathrm{rg}(M \cdot N)) = \mathrm{rg}((M \cdot N)^{\mathrm{tr}}) = \mathrm{rg}(N^{\mathrm{tr}} \cdot M^{\mathrm{tr}}) \overset{\text{part.1}}{\leqslant} \mathrm{rg}(N^{\mathrm{tr}}) = \mathrm{rg}(N)$.

Exercice 9.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 39 \\ 4 \end{pmatrix}, A \cdot D = \begin{pmatrix} 24 & 15 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}, D \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & 33 & -7 \\ -1 & -6 & 10 \\ 6 & -3 & 21 \end{pmatrix}, B \cdot C = \begin{pmatrix} 44 \end{pmatrix} C \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 15 \\ 2 & 16 & 10 \\ 5 & 40 & 25 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 25 & -1 \end{pmatrix}, D \cdot E = \begin{pmatrix} 23 & -3 \\ -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, E \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -3 & -8 & 24 \end{pmatrix},$$

Exercice 10.

1. $D_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}$ de dimension 2, le sous-espace des matrices diagonales. $T_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$ de dimension 3, le sous-espace des matrices triangulaires supérieures.

2. $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{pmatrix} \in D_2(K)$. $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 + y_1z_2 \\ 0 & z_1z_2 \end{pmatrix} \in T_2(K)$. Et $\mathrm{Id}_2 \in D_2(K) \subset T_2(K)$.

3. $D_2(K)$ est commutatif. $T_2(K)$ ne l'est pas, par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 11. 1. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $M^3 + M^2 + M + \mathrm{Id}_3 = \mathbf{0}_3$. La matrice M s'appelle la *matrice compagnon* du polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$.

2. Si $k = 3$, on a $M^3 = -M^2 - M - \mathrm{Id}_3$. Supposons $k \geqslant 4$ et le résultat vrai pour $k-1$. Alors $M^k = M \cdot M^{k-1} \overset{HR}{=} M \cdot (a_2 M^2 + a_1 M + a_0) = a_2 M^3 + a_1 M^2 + a_0 M \overset{cas\_k=3}{=} -a_2 M^2 + (-a_2 + a_0)M - a_2 \mathrm{Id}_3$.

3. (a) Par la partie 2, $\{M^k \mid k \geqslant 0\} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_3, M, M^2)$. Donc $K[M] \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_3, M, M^2)$, car la famille $\{M^k \mid k \geqslant 0\}$ engendre $K[M]$. L'autre inclusion est évidente. La dimension de $K[M]$ est de 3 comme espace vectoriel sur K.

   (b) Tout d'abord, $\mathrm{Id}_3 \in K[M]$. De plus si $\sum_{i=0}^{p} a_i M^i$ et $\sum_{j=0}^{q} b_j M^j \in K[M]$, alors

$$\left(\sum_{i=0}^{p} a_i M^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{q} b_j M^j\right) = \sum_{k=0}^{p+q} \sum_{m=0}^{k} a_m b_{m-k} M^k \in K[M].$$

Exercice 12. 1. On vérifie que $M^2 = M$, donc $\pi^2 = \pi$.

2. En résolvant le système $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $\ker(\pi) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix})$. Pour l'image, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi(e_2^0 - e_1^0)$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pi(e_2^0)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix})$, puisque la dimension de l'image doit tre 2, en vertu du théorème du rang.

3. En vertu du point précédent, et puisque $\pi(v) = v$ pour tout $v \in \mathrm{Im}(\pi)$ et $\pi(v) = 0$ pour tout $v \in \ker(\pi)$, on a que $\mathscr{B}_n = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}^0 \mathscr{B}_n}(\mathrm{Id}_{K^4}) \cdot \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n \mathscr{B}^0}(\mathrm{Id}_{K^4}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}^0 \mathscr{B}^0}(\mathrm{Id}_{K^4}) = \mathrm{Id}_4$. On a $C \cdot C^{-1} = \mathrm{Id}_4$. De même, $C^{-1} \cdot C = \mathrm{Id}_4$. Donc C est inversible.

5. $C^{-1} \cdot M \cdot C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n \mathscr{B}^0}(\mathrm{Id}_{K^4}) \cdot \mathrm{mat}_{\mathscr{B}^0 \mathscr{B}^0}(\pi) \cdot \mathrm{mat}_{\mathscr{B}^0 \mathscr{B}_n}(\mathrm{Id}_{K^4}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n \mathscr{B}_n}(\pi) = P_2$.