The first matrix I designed was quite naturally perfect.

It was a work of art. Flawless. Sublime.

A triumph only equaled by its monumental failure.

Operation sur les lignes

DÉFINITION 10.1. *Les operations elementaires sur les lignes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d'\times d}(K)$ vers $M_{d'\times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \cdots, d'\}$ et $\lambda \in K^\times$ et $\mu \in K$*

(I) *Transposition: Echanger deux lignes $i \neq j \leqslant d'$ de M:*

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

(II) *Dilatation: Multiplier la i-eme ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$:*

$$L_i \to \lambda . L_i .$$

(III) *Combinaison Lineaire: Additioner a la ligne i un multiple scalaire de la la j-ieme ligne pour $i \neq j$: $\mu \in K$*

$$L_i \to L_i + \mu L_j$$

Ces transformations sont appellees transformations *elementaires*.

$$L_i \to L_i + \mu L_j \longrightarrow (L_i + \mu L_j) - \mu L_j = L_i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Car}\, K \neq 2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{d_3}$$

Proposition 10.2. *Les trois operations elementaires sont obtenues par multiplication a gauche de M par des matrices convenables: pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant d'$*

(I) $T_{ij}.\bullet : M \mapsto T_{ij}.M$
(II) $D_{i,\lambda}.\bullet : M \mapsto D_{i,\lambda}.M$
(III) $Cl_{ij,\mu}.\bullet : M \mapsto Cl_{ij,\mu}.M.$

ou les matrices carrees $T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} \in M_{d'}(K)$ *sont definies par:*

$$T_{ij} = \mathrm{Id}_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

$$D_{i,\lambda} = \mathrm{Id}_{d'} + (\lambda - 1).E_{ii},\ \lambda \neq 0$$

$$Cl_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_{d'} + \mu.E_{ij},\ i \neq j \text{ ou } \mu \neq -1 \text{ si } i = j.$$

Définition 10.2. *Les matrices*

$$T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ \lambda \neq 0,\ Cl_{ij,\mu}$$

pour $i, j \leqslant d'$, $\lambda \neq 0$, *et si* $i = j$, $\mu \neq -1$ *sont appellees matrices de transformations elementaires.*

DÉFINITION 10.3. *On dit que N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite de transformations elementaires qui transforme M en N.*

– De maniere equivalente, N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite finie de matrices des transformations elementaires telle que N est obtenue a partir de M par multiplications a gauche par cette suite de matrices.

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est ligne-equivalente

a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

PROPOSITION 10.3. *La relation etre "ligne-equivalente" est une relation d'equivalence sur $M_{d'\times d}(K)$.*

– De plus deux matrices M, N ligne-equivalentes sont equivalentes au sens de la notion d'equivalence de deux matrices de la Definition 8.10.

Preuve : si $N = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot M$

$$\Rightarrow M = T_1^{-1} \cdot \ldots \cdot T_{n-1}^{-1} \cdot T_n^{-1} N$$

$\rightsquigarrow$ symetrique

— $M = T \cdot T^{-1} M$ reflexif

transitif: $N = T_n \circ \cdots \circ T_1 \circ M$

$P = T'_m \circ T'_{m-1} \circ \cdots \circ T'_1 \circ N$

$P = T'_m \circ \cdots \circ T'_1 \circ T_n \circ \cdots \circ T_1 \circ M$

$\sqcap$

Proposition 10.4. *Si $N \in M_{d'\times d}(K)$ est ligne-equivalente a M alors toute ligne de N est combinaison lineaire des lignes de M:*

$$\forall i \leqslant d',\ \mathrm{Lig}_i(N) \in \langle \mathrm{Lig}_1(M), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(M)\rangle \subset K^d$$

et inversement les lignes de M sont combinaisons lineaires des lignes de N. En particulier les SEV engendres par les lignes de M et de N sont les memes

$$\langle \mathrm{Lig}_1(M), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(M)\rangle = \langle \mathrm{Lig}_1(N), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(N)\rangle \subset K^d$$

<u>Preuve</u>: on remarque simplement que pour tout transf elementaire sur les lignes de M les lignes de la nouvelle matrice sont CL de lignes de M.

Cor : Si $M \underset{\text{lign}}{\sim} N \Longrightarrow \operatorname{rg} M = \operatorname{rg} N$

Echelonnage

Définition 10.4. *Une matrice* $M = (m_{ij}) \in M_{d' \times d}(K)$ *est echelonnee si elle est nulle ou bien si*

(1) *Il existe* $1 \leqslant r \leqslant d$ *et* $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d$ *tels que*
   - *Pour la ligne* L_1*, le premier terme non-nul est le* j_1*-ieme: on a* $m_{1j} = 0$ *pour tout* $j < j_1$ *et* $m_{1j_1} \neq 0$,
   - *Pour la ligne* L_2*, le premier terme non-nul est le* j_2*-ieme: on a* $m_{2j} = 0$ *pour tout* $j < j_2$ *et* $m_{2j_2} \neq 0$,
   - $\vdots$
   - *Pour la ligne* L_r*, le premier terme non-nul est le* j_r*-ieme: on a* $m_{rj} = 0$ *pour tout* $j < j_r$ *et* $m_{rj_r} \neq 0$

(2) *Si* $r < d$ *les lignes* $L_{r+1}, \cdots, L_{d'}$ *sont toutes nulles.*

Si M *est non-nulle les* $j_1 < \cdots < j_r$ *sont appeles les* <u>*echelons*</u> *de* M *et les* m_{ij_i}, $1 \leqslant i \leqslant r$ *sont les* <u>*pivots*</u> *de* M.

$$\begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & m_{24} & \cdots & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{35} & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=3$ $\quad j_1=2$ $\quad j_2=4$ $\quad j_3=5$

DÉFINITION 10.5. *Une matrice est echelonnee reduite si le seul coefficient non-nul d'une colonne contenant un pivot est le pivot lui-meme et il vaut 1:*

- *pour tout* $i = 1, \cdots, r$
$$m_{ij_i} = 1.$$

- *Pour tout* $i = 1, \cdots, r$ *et tout* $1 \leqslant i' \neq i \leqslant d'$, *on a*
$$m_{i'j_i} = 0.$$

$$
\begin{array}{r}
x_1 \times L_1 \\
+ x_2 \times L_2 \\
x_3 \times L_3 \\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & m_{13} & 0 & 0 & \cdots & m_{1d} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & m_{2d} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}
$$

THÉORÈME 10.1 (Gauss). *Toute matrice est ligne-equivalente a une matrice echelonnee reduite.*

Preuve: Si $M = 0_{d \times d}$ on a fini

Si $M \neq 0$ soit j_1 le plus petit indice d'une colonne de M qui est $\neq 0$

$m_{ij_1} \neq 0$ quitte a echanger L_i avec L_1

ops que $i=1$. $m_{1j_1} \neq 0$

on fait la dilatation $L_1 \longleftrightarrow \frac{1}{m_{1j_1}} L_1$

àpres la dilatation Ops $m_{1j_1} = 1$

- la descente : sur la colonne j_1 il y a eventuellement des coefs $\neq 0$ m_{ij_1} $i \geq 2$

on remplace L_i par $L_i - m_{ij_1} L_1$
ca a pour effet de mettre m_{ij_1} a 0 $i \geq 2$

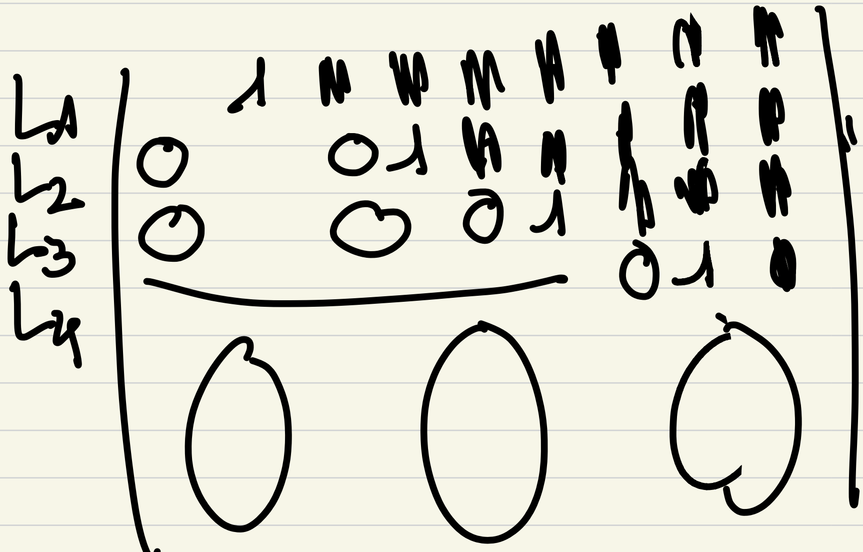
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \sim\sim\sim & \cdots & \sim\sim\sim \\ 0 & 0 & m'_{2,j_2} & \cdots & \cdots & m'_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & m'_{d',j_2} & \cdots & \cdots & m'_{d',d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \sim\sim\sim \\ & 0 & & \\ 0 & \vdots & & M_2 \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

si $M_2 = 0_{d'-1 \times ?}$ on a fini

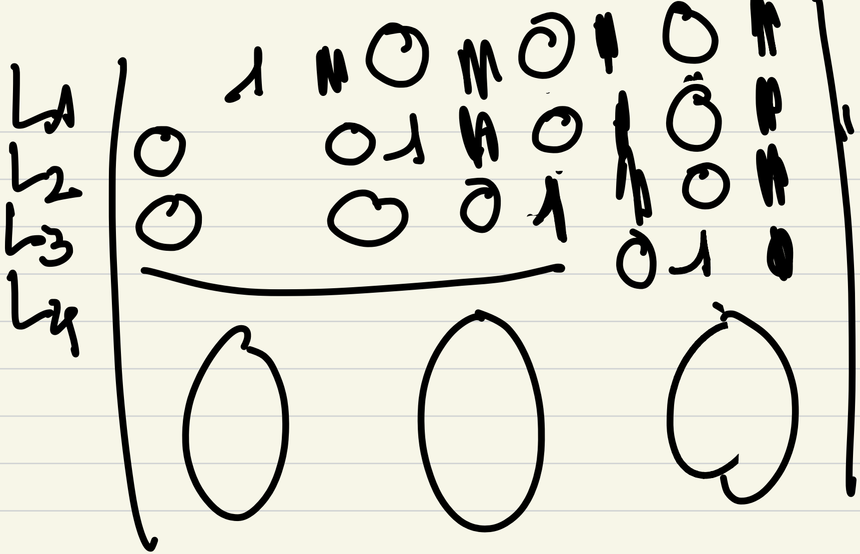
Sinon on fait subir à M_2 le même traitement

⋮

on recommence r fois $\leq d$.



"La remontada"



"La remontada"

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{3j_4} L_4$$

$$\vdots$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{2j_4} L_4 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - m_{1j_4} L_4$$

Ex: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 10.5. *Deux matrices ligne-equivalentes et echelonnees reduites sont egales.*

Corollaire 10.1. *(Unicite de la forme echelonne reduite) Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$ une matrice alors M est ligne-equivalente a une unique matrice echelonnee reduite (qu'on appelle la forme echelonnee reduite de M).*

Preuve (de la Prop) Exercice.

Preuve du Corollaire: Si M est ligne equiv a 2 matrices R, R' echelonnée reduite comme la relation ligne-equiv est une relation d'équiv R et R' sont ligne equiv. $R = R'$ $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ne sont pas ligne-équivalentes

car elles sont éch. réduites.

Applications

Rang

Proposition 10.6. *Si M et N sont lignes equivalentes*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N).$$

Proposition 10.7. *Si R est echelonnee avec r echelons alors*

$$\mathrm{rg}(R) = r.$$

Preuve : Si R et ech reduite ses r premieres lignes sont $\neq 0$ et les suivantes sont nulles

$Rg(R) = \dim \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_r)$

On veut mq que $\{L_1, \dots, L_r\}$ est libre

supposons

$$x_1 L_1 + x_2 L_2 + \dots + x_r L_r = \mathrm{Lig}_d(0) = 0_{d'}$$

on regarde la j_1-ième coordonnée

$$x_1 \underset{\substack{\neq \\ 0}}{m_{1j_1}} + x_2 \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{m_{2j_1}} + \dots + x_r \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{m_{rj_1}} = 0$$

$\Rightarrow x_1 \Lambda = 0$

on fait pareil avec la coord $j_2 > j_1$

$$0 m_{1 j_2} + x_2 m_{2 j_2} + x_3 m_{3 j_2} + \dots + x_r m_{r j_2} = 0$$

$$x_2 = 0 \qquad x_2 < 0$$

$$\vdots$$

$$x_r = 0 .$$

Inversibilité : $d' = d$

Proposition 10.8 (Critere d'inversibilite par operations elementaires). *Soit $M \in M_d(K)$ une matrice carree alors M est inversible ssi M est ligne equivalente a la matrice identite Id_d.*

Preuve. Si M est inversible alors $rg\, M = d$

donc si R = forme ech. red. de M

R possède d pivots $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq d$

$\Rightarrow \quad j_1 = 1 \quad j_2 = 2 \quad \dots \quad j_d = d$

$$d\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 0 & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{d}\right. = I_d$$

M et lig equiv a Id_d

$$M = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot Id_d$$

$$= T_n \cdot \ldots \cdot T_1$$

on sait que les T_j sont inversibles

$\Rightarrow$ M est inversible.

Réciproquement si $M \underset{Lig}{\sim} I_d$

M est un produit de matrices inversible donc est inversible.

$\square$

Le pivot de Gauss donne en une methode explicite pour calculer M^{-1} quand M est inversible

Methode des vases communicants.

M inversible ssi $\exists\, T_1, T_2, \dots, T_n$ tq

$$(T_n \quad T_2 T_1) M = Id$$

$$\Rightarrow M^{-1} = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \dots \cdot T_1$$

$$\begin{array}{c} (T_n \cdots T_2 T_1) M \\ \shortparallel \\ Id_d \end{array} \qquad \underbrace{T_n \cdots T_2 T_1 \circ Id_d}$$

$$T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_1 = M^{-1}$$

Cor K#2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 10.2. *Le groupe lineaire* $\mathrm{GL}_d(K)$ *est engendre par les matrices des transformations elementaires*

$$T_{ij}, D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu},\ i,j \leqslant d,\ \lambda,\mu \in K,\ \lambda \neq 0,\ \textit{et si } i=j,\ \mu \neq -1.$$

En d'autres termes (puisque l'ensemble des matrices de transformations elementaires est stable par inverse) tout matrice $M \in GL_d(K)$ *s'ecrit comme un produit fini de ces matrices.*

Preuve : Soit $M \in GL_d(K)$ alors

$M \sim_{lig} Id_d$ il existe $T_1, \dots, T_n$

tq $M = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \dots \cdot T_1$ $\square$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Extraction de famille generatrice

$$\mathcal{G} = \{w_1, \quad , w_\ell\} \subset V \quad \ell \geq 1$$

$$W = \mathrm{Vect}\{w_1, \dots, w_\ell\} \subset V$$

on cherche une base de W

On se fixe une base B de V et on identifie V avec K^d et W a un SEV de K^d

on associe à chaque w_i un vecteur ligne

L_i

W est identifié à $\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_\ell)$

on cherche une base de vecteurs lignes

Proposition 10.9 (Description matricielle d'une base d'un SEV). *Soit $M \in M_{l\times d}(K)$ la matrice dont les l lignes sont formees des vecteurs lignes L_i, $i \leqslant l$. Soit R la matrice echelonee reduite associee a M et*

$$L'_i = \mathrm{Lig}_i(R),\ \ i \leqslant l$$

l'ensemble des lignes de R alors si R possede r echelons on a

$$\dim W = r$$

et les vecteurs de V correspondants aux r premieres lignes

$$\mathscr{B}_W = \{w'_i = \mathrm{Lig}_{\mathscr{B}}^{-1}(L'_i),\ \ i \leqslant r\}$$

forment une base de W (et les $l-r$ autres vecteurs sont nuls).

$\mathbb{R}^4$

$w_1 = (1\ 2\ 3\ 4)$ $\quad w_2 = (2\ 0\ -1\ 1)$

$w_3 = (-1\ 2\ 4\ 3)$

$W = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$w_1' = w_1$

$w_2' = (0\ 4\ 7\ 7)$

est une base de N

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rmq : (complétion)

Resolution de Systemes Lineaires

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

$w \in W$ et veut resoudre l'equation

$\varphi(v) = w$ d'inconnue v

$$\mathrm{Sol}_{\varphi}(w) = \{ v \in V \text{ tq } \varphi(v) = w \} = \varphi^{(-1)}(\{w\})$$

Cas particulier du pb suivant

Soient G et H 2 gpes

$\varphi : G \to H$ un morphisme

$h \in H$ on veut resoudre l'equation d'inconnue g : $\varphi(g) = h$

$$Sol_\varphi(h) = \{ g \in G \ \varphi(g) = h \} = \varphi^{(-1)}(\{h\})$$

Structure du $Sol_\varphi(h)$?

- Si $h \notin \varphi(G)$ alors $Sol_\varphi(h) = \emptyset$
- Si $h \in \varphi(G)$ il existe g_0 tq $\varphi(g_0) = h$ et toutes les autre solution sont de la forme $g = g_0 * k$ $k \in Ker\,\varphi$

$$\mathrm{Sol}_\varphi(h) = g_0 * \ker\varphi = \{ g_0 * k \quad k \in \mathrm{Ker}\,\varphi \}$$

$$\ker\varphi = \{ k \in G \text{ tq } \varphi(k) = e_H \}$$

$$= \varphi^{(-1)}(\{e_H\}) = \mathrm{Sol}_\varphi(e_H)$$

Pour resoudre cette equation on doit

- trouver g_0 tq $\varphi(g_0) = h$
- trouver les solution de $\varphi(g) = e_H$

Théorème 10.4 (Resolution d'equations dans les espaces vectoriels). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Pour tout $w \in W$, on pose*

$$\mathrm{Sol}_\varphi(w) = \varphi^{-1}(\{w\}) = \{v \in V,\ \varphi(v) = w\} \subset V$$

la preimage de w par φ. En particulier $\mathrm{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_W) = \ker\varphi$. Alors $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ est

- *soit $w \notin \varphi(V)$ et $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ est l'ensemble vide,*
- *soit $w \in \varphi(V)$ et il existe $v^0 \in V$ tel que $\varphi(v^0) = w$ et alors*

$$\mathrm{Sol}_\varphi(w) = v^0 + \mathrm{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_d) = v^0 + \ker\varphi = \{v_0 + k,\ \ k \in \ker\varphi\}.$$

Corollaire 10.2. *Avec les notations precedente, on a en particulier*

- *si $\dim\ker\varphi = 0$ (cad. $\ker\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$ et φ est injective), $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ possede 0 ou 1 element pour tout w.*
- *si $\mathrm{rg}\varphi = \dim\varphi(V) = \dim(W)$ (cad. $\varphi(V) = W$ et φ est surjective) $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ possede au moins un element pour tout w.*
- *Si $\dim V = \dim W$ et que φ est ou bien injective ou bien surjective, φ est bijective et pour tout w, $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ possede exactement un element.*

Traduction matricielle

$\mathcal{B}$ = base de V $\quad$ $\mathcal{B}'$ = base de W

$$M = \underset{\mathcal{B}'\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(\varphi) = (m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$$

$$w = w_1 e_1' + \dots\dots + w_{d'} e_{d'}'$$

$$v = v_1 e_1 + \dots\dots + v_d e_d$$

$$M.\mathrm{Col}(v) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix} = \mathrm{Col}(w) \tag{10.3.2}$$

$$\begin{cases} m_{11} v_1 + m_{12} v_2 + \cdots\cdots + m_{1d} v_d = w_1 \\ \vdots \\ m_{d1} v_1 + \cdots\cdots\cdots + m_{d'd} v_d = w_{d'} \end{cases}$$

On applique les vases communicants

$$\underbrace{T_n \cdots T_2 T_1 \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{d'1} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = T_n \cdots T_2 T_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$R \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1' \\ \\ w_{d'}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \\ 0 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_r \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \Pi_n \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ w'_r \\ \boxed{\begin{matrix} w'_{r+1} \\ \vdots \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

- v_{j_i} = inconnues principales du système
- v_j = inconnues libres du système.

$j \neq j_i$ $i \leq r$ | v_1 v_3 v_4 principales

v_2 v_5 $v_6 \dots v_d$ sont libres

① $r = \text{rang}\, M = \text{rg}\, \varphi$

② $w'_{r+1} = w'_{r+2} = \dots = w'_{d'} = 0$ donnent une equation cartesienne de $\varphi(V)$

et si w verifie ces equation $\Rightarrow w \in \varphi(V)$ et $Sol_\varphi(w) \neq \emptyset$

si w ne verifie pas ces equation $Sol_\varphi(w) = \emptyset$

③ si w verifie les equations $w'_{r+1} = \cdots = w'_{d} = 0$

le systeme est resoluble par une remontada

et on obtient <u>toutes</u> les solutions en

fixant de maniere arbitraire les

inconnues libres et on resoud

ce qui reste en terme des inconnue principales toute solution pour w convenable secrivat comme un vecteur v_0 trouvé en posant toutes les inconnues libres egales a 0 et en resolvant le systeme suivante les inconnues principales et en fixant arbitraicment les inconnues libres et en resolvant le système suivant les inconnues principale pour $w = 0$

on ajoute alors v_0 aux vecteurs ainsi trouvés.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 + w_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 + w_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 + w_2 - w_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1/2 - w_2/4 \\ w_3 + w_2 - w_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2/2 \\ w_1/2 - w_2/4 \\ w_3 + w_2 - w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \\ w_3' = 0 \end{pmatrix}$$

v_1 = var princ v_2 = princ v_3 v_4 = libres on suppose que $w_3 + w_2 - w_1 = 0$

on cherche une sol particulier en posant $V_3 = V_4 = 0$

$$V_{10} = \frac{W/2}{2} \qquad V_{20} = \frac{W_1}{2} - \frac{W_2}{4}.$$

$$V_0 = (V_{10}, V_{20}, 0, 0) = \left(\frac{W_2}{2}, \frac{W_1}{2} - \frac{W_2}{4}, 0, 0\right)$$

On resoud l'equation avec $w = 0_3$

- on fixe arbitrairement v_3, v_4

$$\left.\begin{aligned} v_1 - \frac{v_3}{2} + \frac{v_4}{2} &= 0 \\ v_2 + \frac{7}{4}v_3 + \frac{7}{4}v_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} v_1 &= \frac{v_3}{2} - \frac{v_4}{2} \\ v_2 &= -\frac{7}{4}v_3 - \frac{7}{4}v_4 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Sol}_\varphi(0) = \left\{ \left(\frac{v_3}{2} - \frac{v_4}{2}, -\frac{7}{4}v_3 - \frac{7}{4}v_4, v_3, v_4 \right) \; v_3, v_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 - \frac{1}{2} v_3 + \frac{1}{2} v_4 = 0$$

$$v_2 + \frac{7}{4} v_3 + \frac{7}{4} v_4 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\mathrm{Sol}_{\varphi}(0) = \{ v_3 \cdot V + v_4 \cdot V' \quad v_3, v_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$\vec{V} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}, 1, 0\right)$$

$$\vec{V'} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}, 0, 1\right)$$

$=$ base de ker φ

$$\mathrm{Sol}_{\varphi}(w) = \left(\frac{w_2}{2}, \frac{w_1}{2} - \frac{w_2}{4}, 0, 0\right) + v_3 \cdot \vec{V} + v_4 \vec{V'}$$

le systeme est resoluble ssi

$$w_3 + w_2 - w_1 = 0$$

$$\varphi(\mathbb{R}^4) = \{ (w_1, w_2, w_3) \text{ tq } w_3 + w_2 - w_1 = 0 \}$$

Operations élémentaires sur les colonnes

Définition 10.8. *Les operations elementaires sur les colonnes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d'\times d}(K)$ vers $M_{d'\times d}(K)$: pour $i,j \in \{1,\cdots,d\}$ et $\lambda \in K^{\times}$ et $\mu \in K$*

(I) *Transposition: Echanger deux colonnes $i \neq j \leqslant d'$ de M:*

$$C_i \longleftrightarrow C_j$$

(II) *Dilatation: Multiplier la i-eme colonne par un scalaire $\lambda \neq 0$:*

$$C_i \to \lambda.C_i.$$

(III) *Combinaison Lineaire: Additioner a la colonne i un multiple scalaire de la la j-ieme colonne pour $i \neq j$: $\mu \in K$*

$$C_i \to C_i + \mu C_j$$

la transposition $M \longrightarrow {}^tM$ echange les lignes et les colonnes d'une matrice

Proposition 10.10. *Une operation elementaire sur les colonnes d'une matrice M equivaut a une operation elementaire sur les lignes de $M' = {}^tM$.*

Une telle transformation est donnee par multiplication par la droite

$$M \mapsto M.{}^tT_l$$

par la transposee d'une matrice de transformation elementaire sur les lignes T_l en composant les operations suivantes

$$M \mapsto {}^tM \mapsto T_l.{}^tM \mapsto {}^tT_l.{}^tM = M.{}^tT_l = M.T_c.$$

Il en resulte que des transformations sont bijectives et lineaires.