EPFL Automne 2022
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 11

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

1 Resolution de systemes lineaires

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un parametre. Resoudre le systeme suivant (en fonction de a).

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & y & + & 4z & + & t & = 1 \\ 6x & + & y & - & z & + & 2t & = 5 \\ & & y & + & az & + & 3t & = 2 \end{array}$$

En particulier,

1. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales.
2. Donner une base de l'espace des solutions quand $(1, 5, 2)$ est remplace par $(0, 0, 0)$, .

Exercice 2. Soit K un corps quelconque. Resoudre dans K le systeme ci-dessous (d'inconnues x, y, z, t, u) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x & + & 4y & + & 3z & + & 11t & - & 10u & = a \\ -x & - & 2y & + & 2z & + & 5t & + & 6u & = b \\ & & & & 4z & + & 12t & - & 2u & = c \\ 3x & + & 6y & - & 2z & - & 3t & + & 5u & = d \end{array}$$

En particulier (prendre garde que les reponses peuvent dependre de la caracteristique du corps $\mathrm{car}(K)$)

1. Donner une condition necessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le systeme ai au moins une solution.
2. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales.
3. Donner quand $a = b = c = d = 0$, une base de l'espace des solutions.

Exercice 3. On considere la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application lineaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. En utilisant le resultat de l'exercice 5, donner une base de l'image $\varphi(\mathbb{Q}^4)$.
2. En utilisant la reduction des matrices representer l'image $\varphi(\mathbb{Q}^4)$ sous forme cartesienne.
3. Trouver une base de $\ker(\varphi)$.

Exercice 4. Soit $V = \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$ le $\mathbb{R}$-EV des polynomes de degre $\leqslant 3$; une base est donnees par les monomes $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. On considere l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3} & \mapsto & \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3} \\ P & \mapsto & X^2.P'' - (1+X)P' + P \end{array}.$$

Ici P' et P'' designent les derivees premieres et secondes de P.

1. Ecrire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
2. Resoudre le systeme $\varphi(P) = 0$ et en deduire une base de $\ker(\varphi)$.
3. Donner les equations cartesiennes de $\varphi(V)$.
4. Donner une base de de $\varphi(V)$.

A la recherche d'une base

Exercice 5. Soit $M \in M_{d'\times d}(K)$. Soit $C_j,\ j \leqslant d$ la j-ieme colonne de M et

$$W = \langle C_1, \cdots, C_d \rangle \subset \mathrm{Col}_d(K)$$

l'espace vectoriel engendre par ces colonnes. Soit R la forme echelonnee reduite de M et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d$ ses echelons.

1. Montrer que $\{C_{j_1}, \cdots, C_{j_r}\}$ (les colonnes de la matrice M) forme une base de W. Pour cela on ecrira
$$R = T.M$$
avec T une matrice inversible et on considerera les produits
$$T.C_i,\ i = 1, \dots, d.$$

Remarque 1.1. Si $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\varphi)$ pour $\varphi : V \mapsto W$ cet exercice permet de trouver une base de l'image $\varphi(V)$.

Inversion de matrices

Exercice 6. Soit K un corps de caracteristique $\neq 2$.
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & -3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determiner en fonction de $\mathrm{car}(K)$ quand cette matrice est inversible.
2. Quand c'est le cas, calculer son inverse.

Exercice 7. Soit $K = \mathbb{C}$, Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.
$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ -1+i & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dans la reponse tous les nombres complexes present devront etre sous la forme $a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$: par exemple on ecrira $1/2 - i/2$ au lieu de $1/(1+i)$.

Exercice 8. Soit K un corps, $d \geqslant 1$, $\mathbf{b} = (b_0, \cdots, b_{d-1}) \in K^d$ et $X \in K^\times$ un element non-nul. Pour $d = 4$, on a deja vu la matrice dite "compagnon"
$$M_{\mathbf{b}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix}$$
qui a la propriete de verifier l'equation polynomiale
$$M_{\mathbf{b}}^d + b_{d-1} M_{\mathbf{b}}^{d-1} + \cdots + b_0.\mathrm{Id}_d = \mathbf{0}_d.$$

On considere maintenant ici la matrice "caracteristique" definie pour $X \in K^{\times}$ par

$$d(X, M_{\mathbf{b}}) := X.\mathrm{Id}_d - M_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & X & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $d(X, M_{\mathbf{b}})$ est inversible si et seulement si

$$X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \neq 0.$$

   Pour cela on echelonnera-reduira cette matrice par une suite d'operations de type (III) pour la rendre triangulaire superieure.
2. Montrer que ce critere d'inversibilite reste vrai meme si $X = 0$: $M_{\mathbf{b}}$ est inversible ssi $b_0 \neq 0$ (si on veut, on pourra utiliser l'equation polynomiale satisfaite par $M_{\mathbf{b}}$ pour trouver un inverse ou utiliser des transformations de type (I)).
3. Dans le cas $d = 3$ calculez l' inverse de $d(X, M_{\mathbf{b}})$ (quand cet inverse existe).

Preuve de la proposition 10.5 (d'apres Yinghan)

Exercice 9. ($\star$) Soient $R, R' \in M_{d' \times d}(K)$ deux matrices echelonnees reduites et qui sont lignes equivalentes. On veut montrer que

$$R = R'.$$

Pour $L = (l_1, l_2 \cdots, l_d) \in K^d$ un vecteur ligne et $1 \leqslant j \leqslant d$, on note

$$e_j^*(L) = l_j$$

la j-ieme coordonnee (dans la base canonique) de L.

Soient $L_1, \cdots, L_r,\ L'_1, \cdots, L'_{r'} \subset K^d$ les lignes non-nulles de R et R',

$$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d, 1 \leqslant j'_1 < \cdots < j'_{r'} \leqslant d$$

les positions des pivots et

$$W(R) = \mathrm{Vect}(\{L_1, \cdots, L_r\}),\ W(R') = \mathrm{Vect}(\{L'_1, \cdots, L'_{r'}\}) \subset K^d$$

les espaces vectoriels engendres par les lignes (non-nulles) de R et R'.

1. Montrer que $r = r'$.
2. Montrer que pour $1 \leqslant i, k \leqslant r$, on a

$$e_{j_i}^*(L_k) = \delta_{k=i}$$

et en deduire que pour

$$L = \sum_{k=1}^{r} x_k L_k \in W(R)$$

on a pour $1 \leqslant i \leqslant r$

$$x_i = e_{j_i}^*(L).$$

3. Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ on a $L'_i \in W(R)$. On peut donc ecrire

$$L'_i = \sum_{k=1}^{r} x_{ik} L_k.$$

4. En observant la position du premier coefficient non-nul (dans la base canonique) de L'_1, montrer que $j'_1 \geqslant j_1$, que $j'_1 = j_1$ (observer que R et R' jouent des roles symetriques) et enfin que $x_{11} = 1$.
5. Si $r \geqslant 2$ montrer que $x_{21} = 0$, que $j'_2 = j_2$, et que $x_{22} = 1$ (on notera que $j'_2 > j'_1 = j_1$).
6. Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ on a

$$j_i = j'_i.$$

7. En deduire que pour tout $1 \leqslant i, k \leqslant r$ on a

$$x_{ik} = \delta_{k=i}$$

et que $L'_i = L_i$.